

4. Kinematyka odwrotna

Zadanie kinematyki odwrotnej jest przeciwieństwem zadania kinematyki prostej; można opisać je następująco: *mając daną pozycję i orientację końcówki technologicznej, wyznaczyć zmienne złączowe, które zapewniają osiągnięcie docelowej pozycji i orientacji*. W ogólnym przypadku jest to zadanie trudniejsze, niż zadanie kinematyki prostej, ponieważ na ogół nie istnieje jednoznaczne rozwiązanie nieliniowych równań kinematyki.

Problem kinematyki odwrotnej można przedstawić następująco: dana jest jednorodna macierz przekształcenia 4x4

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix},$$

należy znaleźć jedno lub wszystkie rozwiązania równania

$${}^0\mathbf{H}_n(q_1, q_2, \dots, q_n) = \mathbf{H} \quad (1)$$

gdzie:

$${}^0\mathbf{H}_n(q_1, q_2, \dots, q_n) = {}^0\mathbf{H}_1(q_1) {}^1\mathbf{H}_2(q_2) \dots {}^{n-1}\mathbf{H}_n(q_n) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix}$$

Równanie (1) daje 12 równań z n niewiadomymi, które można zapisać jako

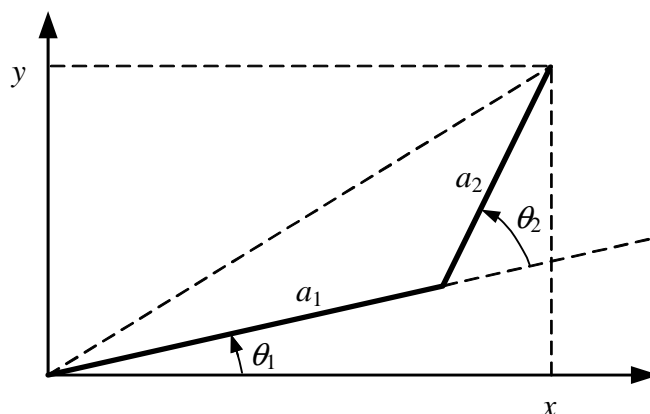
$$H_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_n) = h_{ij}; \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

gdzie: H_{ij}, h_{ij} oznaczają 12 nietrywialnych elementów macierzy, odpowiednio ${}^0\mathbf{H}_n$ i \mathbf{H} . Ponieważ ostatni wiersz obu macierzy jest równy (0,0,0,1), więc spośród 16 równań reprezentowanych przez zależność (1) cztery są trywialne.

Zadanie odwrotne kinematyki można próbować rozwiązać na wiele sposobów np. wykorzystując podejście *geometrycznie*, *analitycznie* lub *numerycznie*.

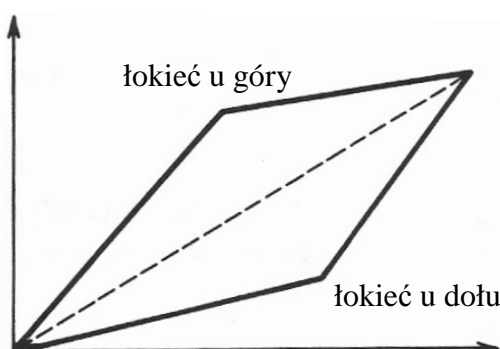
4.1. Podejście geometryczne

Dla manipulatora płaskiego z łokciem (rys. 1) zadanie odwrotne kinematyki polega na znalezieniu zmiennych złączowych θ_1 i θ_2 dla znanych długości członów manipulatora odpowiednio a_1 i a_2 oraz danego położenia chwytaka (x, y) .



Rys. 1. Wyznaczenie kątów w złączach dwuczłonowego manipulatora płaskiego z łokciem

Ponieważ równania kinematyki prostej są najczęściej nieliniowe, przez co znalezienie rozwiązania kinematyki odwrotnej może nie być łatwe i w ogólności nie będzie to rozwiązanie jednoznaczne. Na przykład dla rozważanego przypadku nie ma rozwiązania gdy dane współrzędne (x, y) są poza zasięgiem manipulatora. Istnieje jedno rozwiązanie, gdy ramiona są całkowicie wyprostowane. Gdy współrzędne (x, y) mieszczą się w zasięgu manipulatora, mogą istnieć dwa rozwiązania (rys. 2), czyli konfiguracje „łokieć u góry” i „łokieć u dołu”.



Rys. 2. Rozwiązanie niejednoznaczne kinematyki odwrotnej

Stosując prawo cosinusów, można wyznaczyć kąt θ_2

$$\cos(\theta_2) = \frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} := D \quad (2)$$

$$\theta_2 = \arccos D$$

Jednakże lepszym sposobem znalezienia kąta θ_2 jest zauważenie, że jeśli $\cos \theta_2$ jest dany wzorem (2), to $\sin \theta_2$ jest dany odpowiednio wzorem

$$\sin \theta_2 = \pm \sqrt{1 - D^2}$$

stąd

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{\pm \sqrt{1 - D^2}}{D}\right) \quad (3)$$

Zaletą tego podejścia jest rozróżnienie obu konfiguracji „łokieć u góry” i „łokieć u dołu” przez wybór odpowiedniego znaku w równaniu (2). Kąt θ_1 wyrażony jest wzorem:

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \arctan\left(\frac{a_2 \sin \theta_2}{a_1 + a_2 \cos \theta_2}\right) \quad (4)$$

Zauważmy, że kąt θ_1 zależy od kąta θ_2 . Ma to znaczenie fizyczne, gdyż oczekujemy różnych wartości kąta θ_1 w zależności od tego, które rozwiązanie wybierzemy dla kąta θ_2 .

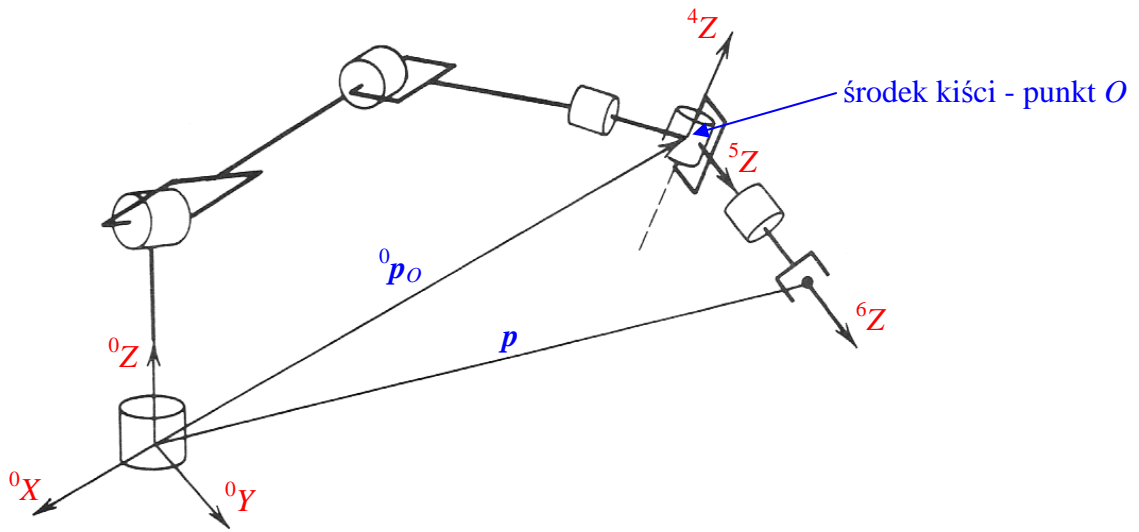
4.2. Odsprężenie kinematyczne

Zadanie odwrotne kinematyki jest raczej problemem trudnym, jednak okazuje się, że dla manipulatorów o sześciu stopniach swobody, których ostatnie trzy osie przecinają się w jednym punkcie, jest możliwe **odsprężenie** powodujące podział kinematyki odwrotnej na dwa prostsze zadania, nazwane *kinematyką odwrotną pozycji* i *kinematyką odwrotną orientacji*. Pierwsze polega na znalezieniu punktu przecięcia osi kiści (zwanego *środkiem*

kości) drugie na znalezieniu orientacji kości. Przedstawmy zależność (1) dla manipulatora o sześciu stopniach swobody w następującej postaci

$$\begin{aligned} {}^0R_6(q_1, \dots, q_6) &= R \\ {}^0p_{0,6}(q_1, \dots, q_6) &= p \end{aligned}$$

gdzie: p i R opisują odpowiednio daną pozycję i orientację układu narzędzia (układu {6}), patrz rys. 3).



Rys. 3. Odsprężenie kinematyczne

Dla rozważanej kości osie 4Z , 5Z , 6Z przecinają się w punkcie O , stąd początki układów {4} i {5} umieszczonych zgodnie z konwencją D-H będą zawsze w środku kości - punkt O . Często początek {3} będzie również w O , ale nie jest to konieczne do dalszych rozważań.

Ważnym punktem przedstawionego założenia dla kinematyki odwrotnej jest to, że ruch ostatnich trzech osi nie zmienia położenia punktu O . Zatem położenie środka kości jest funkcją tylko pierwszych trzech zmiennych złączowych q_1, q_2, q_3 . 0p_O oznacza wektor od początku układu bazowego do środka kości. Układ współrzędnych końcówki roboczej ({6}), względem układu bazowego, opisany jest przez wektor p i orientację $R = (r_{ij})$. Ponieważ początek układu {6} jest przesunięty o odległość ε_6 wzdłuż osi 5Z od punktu O można napisać

$${}^0\mathbf{p}_O = \mathbf{p} - \varepsilon_6 \mathbf{R} \mathbf{k} \quad (5)$$

Jeżeli współrzędne wektora \mathbf{p} oznaczmy przez p_x, p_y, p_z a współrzędne wektora środka kiści przez p_{Ox}, p_{Oy}, p_{Oz} to równanie (5) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} p_{Ox} \\ p_{Oy} \\ p_{Oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x - \varepsilon_6 r_{13} \\ p_y - \varepsilon_6 r_{23} \\ p_z - \varepsilon_6 r_{33} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Znając położenie środka kiści (6) można wyznaczyć wartości pierwszych trzech zmiennych złączowych q_1, q_2, q_3 stosując podejście geometryczne. Na podstawie wyznaczonych pierwszych trzech zmiennych złączowych należy obliczyć macierz obrotu ${}^0\mathbf{R}_3$ która zależy tylko od tych wielkości. Następnie z wyrażenia

$$\mathbf{R} = {}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{R}_6 \quad (7)$$

można określić orientację końcówki roboczej (ostatnie trzy zmienne złączowe) względem układu $\{3\}$ jako

$${}^3\mathbf{R}_6 = ({}^0\mathbf{R}_3)^{-1} \mathbf{R} = ({}^0\mathbf{R}_3)^T \mathbf{R} \quad (8)$$

To, że konstrukcje manipulatorów rozwinęły się do takiego, a nie innego stanu obecnego, spowodowane było częściowo trudnościami z odwrotnym zadaniem kinematyki. Ogólnie można powiedzieć, że stopień skomplikowania zadania kinematyki odwrotnej wzrasta ze wzrostem liczby niezerowych parametrów kinematycznych. Dla większości manipulatorów wiele parametrów spośród a_i, ε_i jest równych zeru, wartości parametrów α_i wynoszą 0 lub $\pm\pi/2$ itd.

4.3. Kinematyka odwrotna kiści – podejście analityczne

Założmy, że dana jest macierz $\mathbf{U} = (u_{ij})_{3 \times 3}$, gdzie $\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{1}$, $\det(\mathbf{U})=1$ oraz przekształcenie ${}^3\mathbf{R}_6$ kiści (patrz rozdział 3, str. 8 i 9). Zadaniem jest znalezienie kątów $\theta_4, \theta_5, \theta_6$, spełniających równanie macierzowe

$${}^3R_6 = U$$

$$\begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & -c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - s\theta_4 c\theta_6 & c\theta_4 s\theta_5 \\ s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6 & -s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6 & s\theta_4 s\theta_5 \\ -s\theta_5 c\theta_6 & s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \quad (9)$$

1) Jeśli u_{13} i $u_{23} \neq 0$ wówczas $s\theta_5 \neq 0$ i wtedy elementy u_{31} i u_{32} nie są jednocześnie równe zero. Ponieważ $c\theta_5 = u_{33}$ stąd $s\theta_5 = \pm\sqrt{1-u_{33}^2}$, zatem

$$\theta_5 = \text{Atan}(u_{33}, \sqrt{1-u_{33}^2})$$

lub

$$\theta_5 = \text{Atan}(u_{33}, -\sqrt{1-u_{33}^2})$$

Dla $s\theta_5 > 0$ otrzymujemy:

$$\theta_4 = \text{Atan}(u_{13}, u_{23})$$

$$\theta_6 = \text{Atan}(-u_{31}, u_{32})$$

Dla $s\theta_5 < 0$ otrzymujemy:

$$\theta_4 = \text{Atan}(-u_{13}, -u_{23})$$

$$\theta_6 = \text{Atan}(u_{31}, -u_{32})$$

2) Jeśli u_{13} i $u_{23} = 0$ ($s\theta_5 = 0$) wówczas $u_{33} = \pm 1$ i $u_{31} = u_{32} = 0$. Dla tego przypadku

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

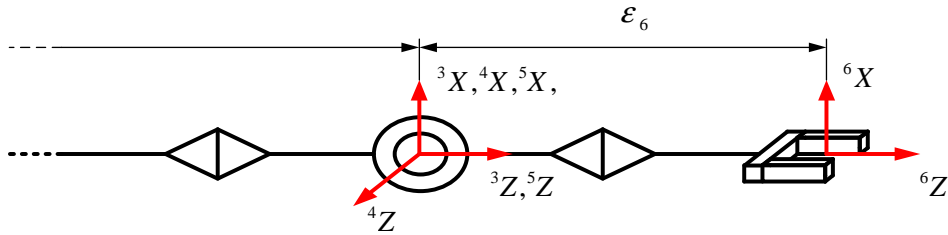
Dla $u_{33} = 1 \rightarrow c\theta_5 = 1$ i $s\theta_5 = 0$ więc $\theta_5 = 0$. W tym przypadku (9) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & -c\theta_4 s\theta_6 - s\theta_4 c\theta_6 & 0 \\ s\theta_4 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6 & -s\theta_4 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\theta_4 + \theta_6) & -s(\theta_4 + \theta_6) & 0 \\ s(\theta_4 + \theta_6) & c(\theta_4 + \theta_6) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sumę $\theta_4 + \theta_6$ można wyznaczyć z:

$$\theta_4 + \theta_6 = \text{Atan}(u_{11}, u_{21}) = \text{Atan}(u_{11}, -u_{12}) \quad (10)$$

Jeśli $\theta_5 = 0$ osie złącz 3 i 5 są współosiowe (rys. 4). Jest to konfiguracja osobliwa i można wyznaczyć jedynie sumę $\theta_4 + \theta_6$. Dla tego przypadku istnieje nieskończenie wiele rozwiązań. Jednym z możliwych działań w takiej sytuacji jest wybranie dowolnej wartości kąta θ_4 i wyznaczenie θ_6 z (10).



Rys. 4. Kiść sferyczna

Dla $u_{33} = -1 \rightarrow c\theta_5 = -1$ i $s\theta_5 = 0$ więc $\theta_5 = \pi$. W tym przypadku (9) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} -c(\theta_4 - \theta_6) & -s(\theta_4 - \theta_6) & 0 \\ s(\theta_4 - \theta_6) & c(\theta_4 - \theta_6) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Różnicę $\theta_4 - \theta_6$ można wyznaczyć z:

$$\theta_4 - \theta_6 = \text{Atan}(-u_{11}, -u_{12}) = \text{Atan}(u_{22}, u_{21})$$

Również dla tego przypadku uzyskuje się nieskończenie wiele rozwiązań.

Literatura:

- [1] Craig J. J.: *Wprowadzenie do robotyki. Mechanika i sterowanie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1995
- [2] Jezierski E.: *Dynamika robotów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006
- [3] Spong M. W., Vidyasagar M.: *Dynamika i sterowanie robotów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1997

Informacja o prawach autorskich

*O ile nie zaznaczono inaczej, rysunki i teksty pochodzą z pozycji podanych w literaturze.
Niniejsze opracowanie stanowi pomoc do wykładu „Podstawy Robotyki”.*