

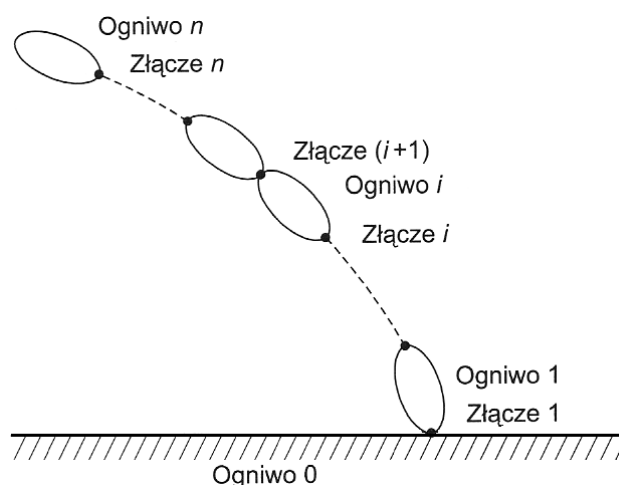
3. Kinematyka prosta – notacja Denavita-Hartenberga

Kinematyka jest nauką, zajmującą się badaniem ruchu, bez wnikania w przyczyny wywołujące ruch. W zakresie kinematyki bada się położenie ciała, jego prędkość, przyspieszenie oraz pochodne wyższych rzędów względem zmiennych położenia (względem czasu lub innej zmiennej albo zmiennych).

Zadanie kinematyki prostej można zdefiniować następująco: mając dane zmienne złączowe (przegubowe) robota, określić pozycję i orientację końcówki roboczej. Dla złącz (przegubów) obrotowych zmiennymi złączowymi są kąty między ogniwami (członami), natomiast dla złącz przesuwnych (pryzmatycznych) wysunięcia ogniw (członów).

W celu przeprowadzenia analizy kinematyki wyobrażamy sobie manipulator robota jako ciąg sztywnych ogniw połączonych ze sobą złączami. Ponadto zakładamy że wszystkie złącza mają jeden stopień swobody (nie zmniejsza to ogólności rozważań, ponieważ dowolne złącze klasy mniejszej do V może być traktowane jako szereg pojedynczych złącz klasy V z zerową długością ogniw między nimi).

Z każdym z ogniw można związać kartezjański układ współrzędnych. Aby rozważania miały charakter systematyczny ogniwo i złącza są numerowane zgodnie z algorytmem **Denavita-Hartenberga**. Podstawie manipulatora (ogniwo nieruchome) przypisuje się numer 0, kolejne ogniwa mają numery od 1 do n . Złącza numeruje się w sposób podobny przy czym pierwsze przy podstawie ma numer 1, a ostatnie n . i -te ogniwo znajduje się między złączami i oraz $(i+1)$ (rys. 1).

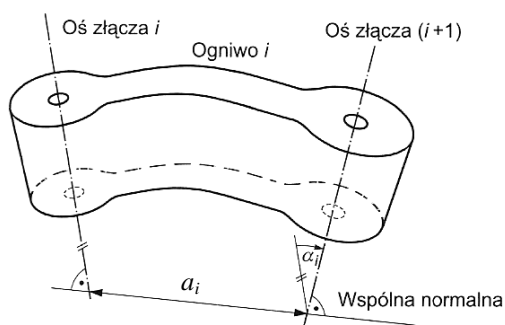


Rys. 1. Oznaczenia ogniw i złącz łańcucha kinematycznego

Podstawowymi parametrami ogniwa są: **długość i kąt skręcenia** (rys. 2).

Długość ogniwa a_i jest odległością między osiami złączy mierzoną wzdłuż wspólnej normalnej do tych osi. W szczególnym przypadku gdy osie się przecinają, $a_i = 0$.

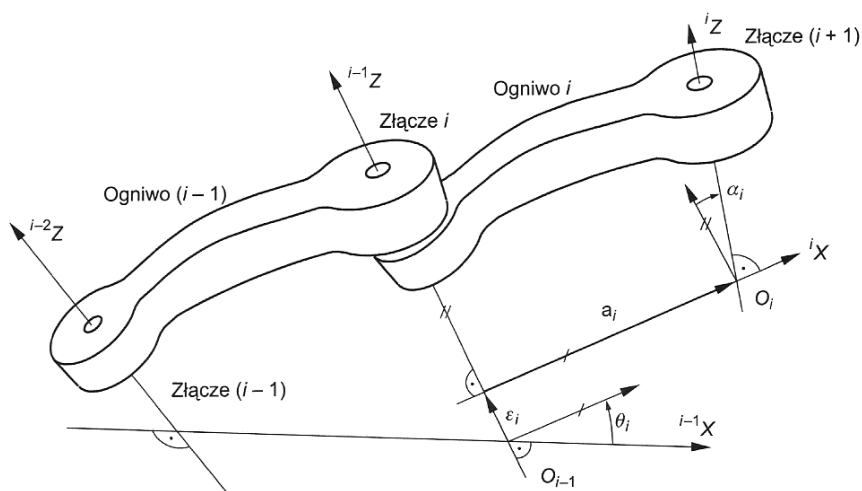
Kąt skręcenia α_i jest kątem pomiędzy osiami złączy i jest mierzony w kierunku od osi i do osi $(i+1)$, zgodnie z zasadą śruby prawoskrętnej wokół wspólnej normalnej.



Rys. 2. Długość i kąt skręcenia ogniwa

Zgodnie z algorytmem Denavita-Hartenberga z i -tym ogniwem związany jest i -ty układ współrzędnych w taki sposób, że (rys. 3):

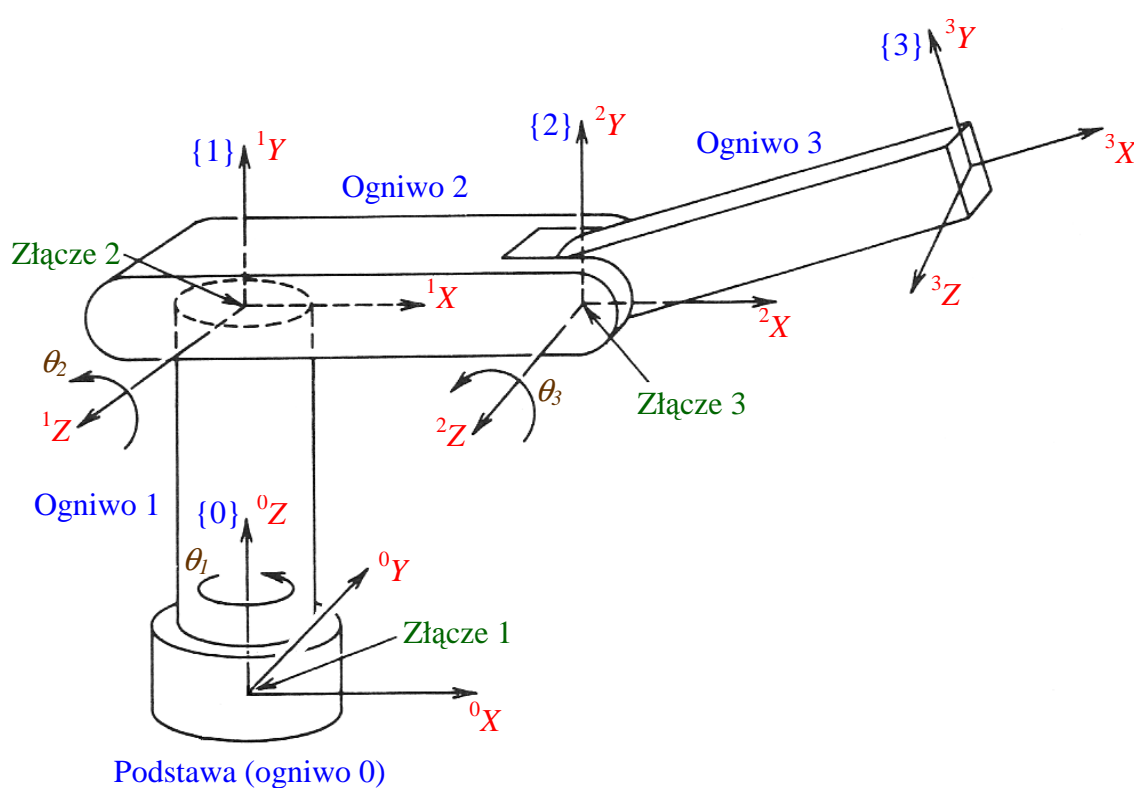
- ❑ oś iZ jest osią $(i+1)$ -go złącza, (zwrot może być dowolnie przyjęty);
- ❑ oś iX jest wspólną normalną do osi złączy i -tego i $(i+1)$ -go i skierowana jest w stronę ogniwa o wyższych numerach;
- ❑ oś iY jest uzupełnieniem dwóch poprzednich osi do prawoskrętnego, kartezjańskiego układu układu współrzędnych (czasami pomijana w celu zwiększenia czytelności rysunków).



Rys. 3. Układy współrzędnych związane z kolejnymi ogniwami

W algorytmie Denavita-Hartenberga za pomocą czterech wielkości jednoznacznie określa się położenie kolejnych układów współrzędnych względem układu poprzedniego (rys. 3 i 4). Wielkościami te to:

- 1) **kąt skręcenia ogniwa** α_i ,
- 2) **długość ogniwa** a_i (mierzona wzdłuż osi iX od ${}^{i-1}Z$ do iZ),
- 3) **przesunięcie liniowe w złączu** ε_i (mierzone wzdłuż osi ${}^{i-1}Z$ od ${}^{i-1}X$ do iX),
- 4) **kąt obrotu złącza** θ_i (mierzony wokół osi ${}^{i-1}Z$ od ${}^{i-1}X$ do iX , zgodnie z zasadą śruby prawo skrętnej).



Rys. 4. Układy współrzędnych doczepione do manipulatora

Spośród wymienionych czterech wielkości jednoznacznie określających położenia kolejnych układów współrzędnych trzy są zawsze stałe i nazwane **parametrami złączowymi**, natomiast jedna jest zmienną i nazwana jest **zmienną złączową**. Dla złącza obrotowego zmienną złączową jest kąt θ_i , z kolei dla złącza przesuwne zmienną złączową jest przesunięcie ε_i .

Po określeniu parametrów i zmiennych złączowych związku pomiędzy kolejnymi układami współrzędnych zapisuje się za pomocą jednorodnych przekształceń. Aby przejść od układu $\{i-1\}$ do układu $\{i\}$ należy wykonać iloczyn jednorodnych macierzy elementarnych w następującej kolejności (patrz rys. 3):

- 1) obrót wokół osi ${}^{i-1}Z$ o kąt θ_i - **Rot**(Z, θ_i)
- 2) przesunięcie wzdłuż bieżącej osi Z o odcinek ε_i - **Trans**($0,0,\varepsilon_i$)
- 3) przesunięcie wzdłuż bieżącej osi X o odcinek a_i - **Trans**($a_i,0,0$)
- 4) obrót wzdłuż bieżącej osi X o kąt α_i - **Rot**(X, α_i)

$${}^{i-1}\mathbf{H}_i = \mathbf{Rot}(Z, \theta_i) \mathbf{Trans}(0,0,\varepsilon_i) \mathbf{Trans}(a_i,0,0) \mathbf{Rot}(X, \alpha_i) =$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & \varepsilon_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow 1 \text{ zmienna i 3 parametry}$$

Zmienną złączową i -tej macierzy jednorodnej ${}^{i-1}\mathbf{H}_i$ oznacza się symbolem q_i , jest nią θ_i lub ε_i w zależności od rodzaju złącza.

Opis położenia dowolnie wybranego punktu w układach $\{i-1\}$ oraz $\{i\}$ ma postać:

$${}^{i-1}\hat{\mathbf{r}} = {}^{i-1}\mathbf{H}_i(q_i) {}^i\hat{\mathbf{r}}$$

Relację między układem podstawowym $\{0\}$ i układem $\{n\}$ końcówki roboczej opisuje równanie

$${}^0\hat{\mathbf{r}} = {}^0\mathbf{H}_1(q_1) {}^1\mathbf{H}_2(q_2) \dots {}^{n-1}\mathbf{H}_n(q_n) {}^n\hat{\mathbf{r}} = {}^0\mathbf{H}_n(\mathbf{q}) {}^n\hat{\mathbf{r}}$$

gdzie:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

wektor zmiennych złączowych.

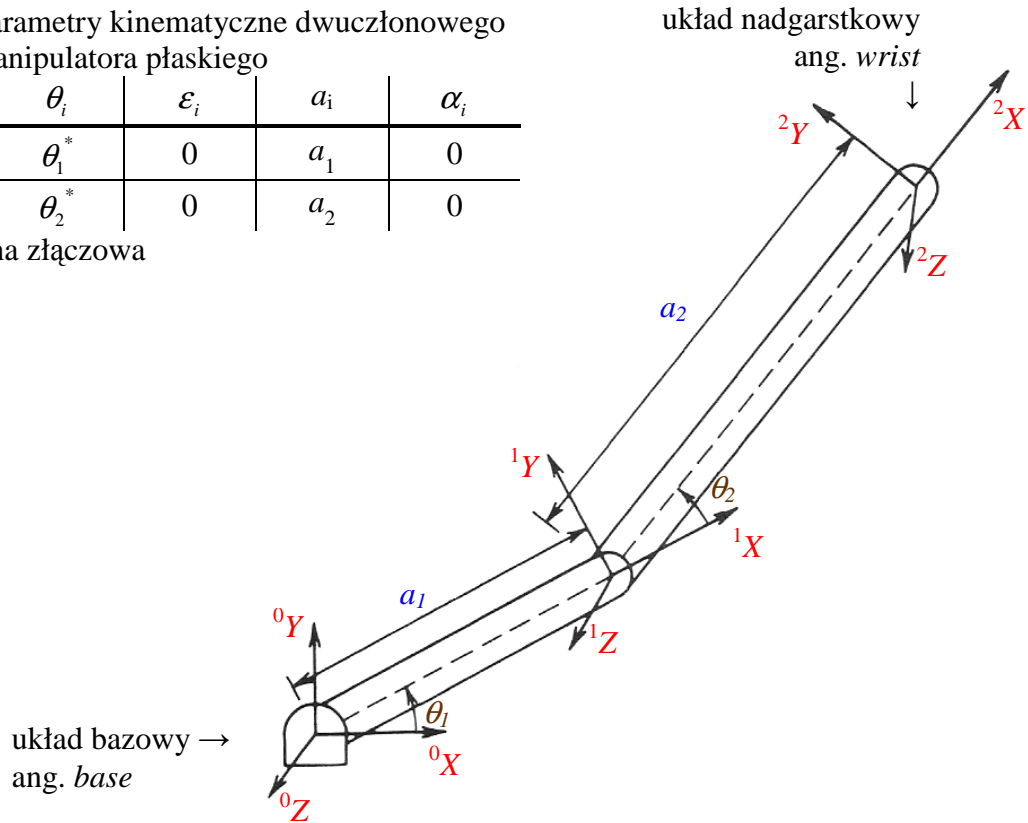
Przykład 1 – manipulator płaski z łokciem

Wyznamy macierz jednorodną całego łańcucha kinematycznego manipulatora płaskiego z łokciem (rys. 5). Układy współrzędnych przyjęto zgodnie z algorytmem Denavita-Hartenberga. Następny krok to wyznaczenie parametrów i zmiennych wiążących te układy. Zestawiono je w tab. 1.

Tab. 1. Parametry kinematyczne dwuczłonowego manipulatora płaskiego

Ogniwo	θ_i	ε_i	a_i	α_i
1	θ_1^*	0	a_1	0
2	θ_2^*	0	a_2	0

* - zmienna złączowa



Rys. 5. Dwuczłonowy manipulator płaski

Kolejne macierze jednorodne przyjmują postać

$${}^0H_1 = \text{Rot}(Z, \theta_1) \text{Trans}(a_1) = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & a_1c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & a_1s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1H_2 = \text{Rot}(Z, \theta_2) \text{Trans}(a_2) = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Po wyznaczeniu iloczynu tych trzech macierzy otrzymuje się macierz jednorodną ${}^0\mathbf{H}_2$ dla całego łańcucha kinematycznego tego manipulatora

$${}^0\mathbf{H}_2 = {}^0\mathbf{H}_1 \cdot {}^1\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} c(\theta_1 + \theta_2) & -s(\theta_1 + \theta_2) & 0 & a_1c\theta_1 + a_2c(\theta_1 + \theta_2) \\ s(\theta_1 + \theta_2) & c(\theta_1 + \theta_2) & 0 & a_1s\theta_1 + a_2s(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że:

- trzy pierwsze elementy ostatniej kolumny macierzy ${}^0\mathbf{H}_2$ są współrzędnymi początku układu {2} w układzie bazowym, są współrzędnymi końcówki roboczej w bazowym układzie współrzędnych,
- część obrotowa macierzy ${}^0\mathbf{H}_2$ opisuje orientację układu {2} w stosunku do układu bazowego.

Przykład 2 – manipulator stawowy

Wyznamy macierz jednorodną całego łańcucha kinematycznego manipulatora stawowego (rys. 4). Parametry kinematyczne manipulatora zamieszczono w tab. 2.

Tab. 2. Parametry kinematyczne manipulatora stawowego

Ogniwo	θ_i	ε_i	a_i	α_i
1	θ_1^*	ε_1	0	90°
2	θ_2^*	0	a_2	0
3	θ_3^*	0	a_3	0

* - zmienna złączowa

Macierze jednorodne ${}^{i-1}\mathbf{H}_i$ mają postać

$${}^0\mathbf{H}_1 = \mathbf{Rot}(Z, \theta_1) \mathbf{Trans}(0, 0, \varepsilon_1) \mathbf{Rot}(X, 90^\circ) = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

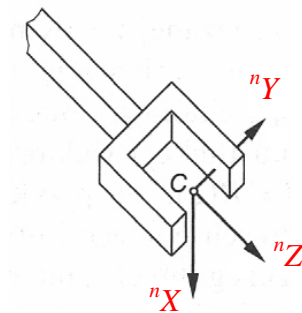
$${}^1H_2 = \text{Rot}(Z, \theta_2) \text{Trans}(a_2, 0, 0) = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2H_3 = \text{Rot}(Z, \theta_3) \text{Trans}(a_3, 0, 0) = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_3c\theta_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & a_3s\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz jednorodna 0H_3 całego łańcucha kinematycznego ma postać

$${}^0H_3 = {}^0H_1 \cdot {}^1H_2 \cdot {}^2H_3 = \begin{bmatrix} c\theta_1c(\theta_2 + \theta_3) & -c\theta_1s(\theta_2 + \theta_3) & s\theta_1 & (a_2c\theta_2 + a_3c(\theta_2 + \theta_3))c\theta_1 \\ s\theta_1c(\theta_2 + \theta_3) & -s\theta_1s(\theta_2 + \theta_3) & -c\theta_1 & (a_2c\theta_2 + a_3c(\theta_2 + \theta_3))s\theta_1 \\ s(\theta_2 + \theta_3) & c(\theta_2 + \theta_3) & 0 & a_1 + a_2s\theta_2 + a_3s(\theta_2 + \theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

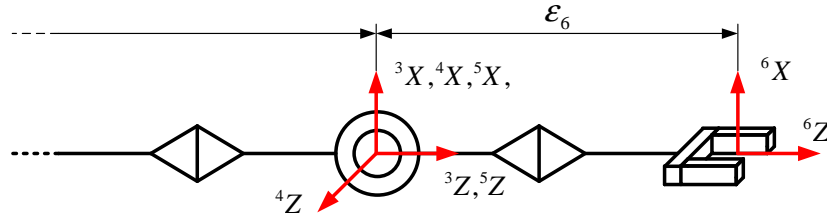
Stosując algorytm D-H istnieje pewna swoboda przy wyborze układu podstawowego (tzn. osie 0X , 0Y wybiera się dowolnie, tak aby układ był prawoskrętny) oraz ostatniego układu współrzędnych $\{n\}$. W przypadku układu współrzędnych związanego z końcem ostatniego ogniwa, należy kierować się geometrią efektora. Dla chwytaka będziemy przyjmować układ współrzędnych jak na rys. 6.



Rys. 6. Definicja osi układu związanego z chwytakiem

Kinematyka prosta kiści sferycznej.

Konfigurację kiści ilustruje rys. 7. Przykładem robota z kiścią tego typu jest Fanuc ARC Mate 100 (rys. 8). Osie złącz (przegubów) 3Z , 4Z , 5Z przecinają się w jednym punkcie. Parametry Denavita-Hartenberga przedstawiono w tab. 3.



Rys. 7. Przyporządkowanie układów współrzędnych w kiści sferycznej

Tab. 3. Parametry Denavita-Hartenberga dla kiści sferycznej

Ogniwo	θ_i	ϵ_i	a_i	α_i
4	θ_4^*	0	0	-90°
5	θ_5^*	0	0	90°
6	θ_6^*	ϵ_6	0	0

* - zmienna złączowa

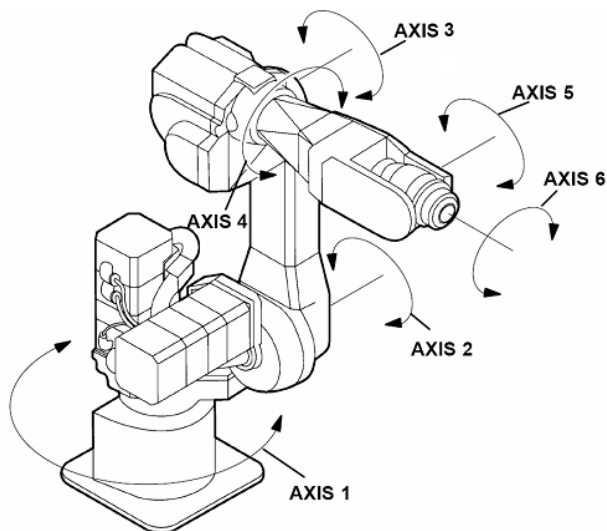
Macierze jednorodne mają postać

$${}^3H_4 = \text{Rot}(Z, \theta_4) \text{Rot}(X, -90^\circ) = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4H_5 = \text{Rot}(Z, \theta_5) \text{Rot}(X, 90^\circ) = \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5H_6 = \text{Rot}(Z, \theta_6) \text{Trans}(0, 0, \epsilon_6) = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \epsilon_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3H_6 = {}^3H_4 \cdot {}^4H_5 \cdot {}^5H_6 = \begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & -c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - s\theta_4 c\theta_6 & c\theta_4 s\theta_5 & c\theta_4 s\theta_5 \varepsilon_6 \\ s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6 & -s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6 & s\theta_4 s\theta_5 & s\theta_4 s\theta_5 \varepsilon_6 \\ -s\theta_5 c\theta_6 & s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 & c\theta_5 \varepsilon_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rys. 8. Model robota Fanuc ARC Mate 100

Literatura:

- [1] Craig J. J.: *Wprowadzenie do robotyki. Mechanika i sterowanie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1995
- [2] Jezierski E.: *Dynamika robotów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006
- [3] Spong M. W., Vidyasagar M.: *Dynamika i sterowanie robotów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1997
- [4] FANUC Robotics SYSTEM R-J2 Controller ArcTool Setup and Operations Manual, Version 4.40-1, 1998

Informacja o prawach autorskich

O ile nie zaznaczono inaczej, rysunki i teksty pochodzą z pozycji podanych w literaturze. Niniejsze opracowanie stanowi pomoc do wykładu „Podstawy Robotyki”.