

## 6. Jakobian manipulatora

Pożądane ruchy efektora robota definiowane są w przestrzeni zadaniowej. W przestrzeni tej położenie i orientacja narzędzia wyrażone są przez *wektor zmiennych zadaniowych*  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ ,  $m \leq 6$ . W najbardziej ogólnym przypadku  $m = 6$  (tzn. trzy składowe wektora  $\mathbf{x}$  określają położenie, a pozostałe orientację).

Konfiguracja łańcucha kinematycznego (położenia i orientacja efektora) jest określona przez *wektor zmiennych złączowych*  $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$ , gdzie:  $n$  – liczba złącz.

Zwykle narzucona jest trajektoria ruchu efektora  $\mathbf{x}(t)$  którą należy zrealizować. Wymaga to wyznaczenia  $\mathbf{q}(t)$ . Zagadnienie to występuje np. przy planowaniu i wykonywaniu trajektorii gładkich. Użyteczne jest więc znalezienie związku pomiędzy prędkościami złączowymi a prędkościami liniowymi i kątowymi końcówki roboczej.

Związki pomiędzy prędkościami wektora złączowego  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n$  a prędkościami ruchu postępowego  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$  i kąтового  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{R}^3$  efektora wyznaczone są przez **jakobian** manipulatora

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{v} \\ {}^0\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (1)$$

Jakobian jest zawsze macierzą o wymiarach  $6 \times n$ .

Rozważmy łańcuch kinematyczny manipulatora składający się z  $n$  ogniw. Z ostatnim ogniwem związany jest lokalny układ współrzędnych  $\{n\}$ , którego lokalizację względem układu podstawowego  $\{0\}$  określa macierz jednorodna

$${}^0\mathbf{H}_n(q_1, \dots, q_n) = {}^0\mathbf{H}_n(\mathbf{q}_n) = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_n(\mathbf{q}_n) & {}^0\mathbf{p}_{0,n}(\mathbf{q}_n) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

gdzie:  $\mathbf{q}_n = [q_1, \dots, q_n]^T$ . Prędkości ruchu postępowego i obrotowego układu  $\{n\}$  względem układu podstawowego oznaczone odpowiednio jako  ${}^0\mathbf{v}_{0,n}$  oraz  ${}^0\boldsymbol{\omega}_{0,n}$  wynoszą:

$${}^0\mathbf{v}_{0,n} = \frac{d {}^0\mathbf{p}_{0,n}}{dt} \quad (3)$$

$${}^0\omega_{0,n} = \text{inv}S\left(\frac{d{}^0R_n}{dt} {}^0R_n^T\right) \quad (4)$$

Są one funkcjami wektora prędkości złączowych  $\dot{\mathbf{q}}_n$ . Zatem, dla wprowadzonych oznaczeń

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{v}_{0,n} \\ {}^0\omega_{0,n} \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{J}(\mathbf{q}_n)\dot{\mathbf{q}}_n \quad (5)$$

gdzie:  ${}^0\mathbf{J}_{0,n}(\mathbf{q}_n)$  jakobian manipulatora składającego się z  $n$  ogniw.

Postać  $i$ -tej kolumny jakobianu zależy od rodzaju złącza. Dla **złącza przesuwne**  $i$ -ta kolumna jakobianu dana jest wzorem

$$({}^0\mathbf{J}(\mathbf{q}_n))_i = \begin{bmatrix} ({}^0\mathbf{R}_{i-1})_3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6)$$

dla **złącza obrotowego** ma postać

$$({}^0\mathbf{J}(\mathbf{q}_n))_i = \begin{bmatrix} ({}^0\mathbf{R}_{i-1})_3 \times ({}^0\mathbf{p}_{0,n} - {}^0\mathbf{p}_{0,i-1}) \\ ({}^0\mathbf{R}_{i-1})_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

gdzie przez  $({}^0\mathbf{R}_{i-1})_3$  oznaczono trzecią kolumnę macierzy obrotu  ${}^0\mathbf{R}_{i-1}$ .

Jakobian całego łańcucha kinematycznego o  $n$  zmiennych złączowych można przedstawić w postaci macierzy

$${}^0\mathbf{J}(\mathbf{q}_n) = [({}^0\mathbf{J}(\mathbf{q}_n))_1 \quad ({}^0\mathbf{J}(\mathbf{q}_n))_2 \quad \dots \quad ({}^0\mathbf{J}(\mathbf{q}_n))_n] = \begin{bmatrix} {}^0\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{q}_n) \\ {}^0\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q}_n) \end{bmatrix} \quad (8)$$

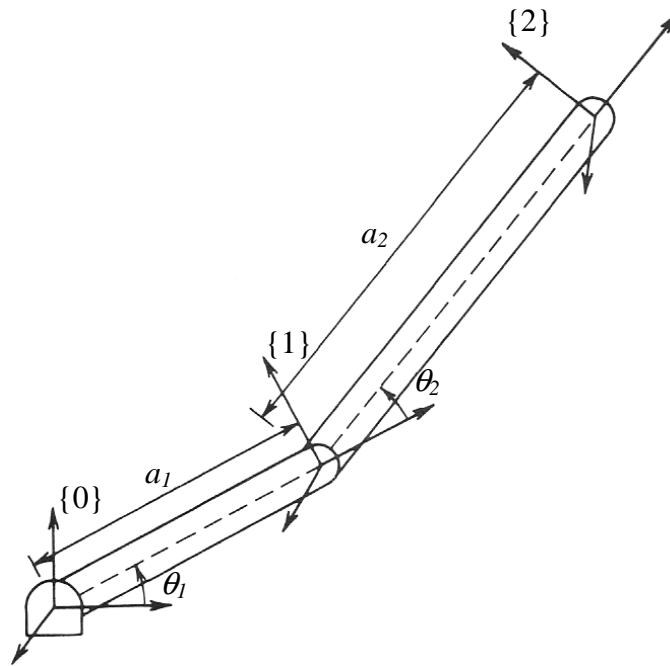
gdzie górna podmacierz odpowiada za przekształcenie prędkości złączowej  $\dot{\mathbf{q}}_n$  w wektor prędkości liniowej układu  $\{n\}$ , a dolna odpowiada za przekształcenie prędkości złączowej  $\dot{\mathbf{q}}_n$  w wektor prędkości kątowej tego układu tzn.

$${}^0\mathbf{v}_{0,n} = {}^0\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{q}_n)\dot{\mathbf{q}}_n \quad (9a)$$

$${}^0\boldsymbol{\omega}_{0,n} = {}^0\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q}_n)\dot{\mathbf{q}}_n \quad (9b)$$

### Przykład

Wyznacz macierz jacobianową dla manipulatora płaskiego przedstawionego na rys. 1.



Rys. 1. Manipulator płaski z łokciem

### *Rozwiązanie*

Ponieważ wszystkie dwa ( $n = 2$ ) przeguby są obrotowe, to macierz jacobianowa, która w tym przypadku ma wymiar  $6 \times 2$ , jest postaci:

$$\mathbf{J} = \left[ \begin{array}{c|c} ({}^0\mathbf{R}_0)_3 \times ({}^0\mathbf{p}_{0,2} - {}^0\mathbf{p}_{0,0}) & ({}^0\mathbf{R}_1)_3 \times ({}^0\mathbf{p}_{0,2} - {}^0\mathbf{p}_{0,1}) \\ ({}^0\mathbf{R}_0)_3 & ({}^0\mathbf{R}_1)_3 \end{array} \right]$$

$i = 1 \qquad \qquad \qquad i = 2$

Analizując zadanie kinematyki prostej dla tego manipulatora łatwo zauważyć że:

$${}^0\mathbf{p}_{0,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, {}^0\mathbf{p}_{0,1} = \begin{bmatrix} a_1 c \theta_1 \\ a_1 s \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, {}^0\mathbf{p}_{0,2} = \begin{bmatrix} a_1 c \theta_1 + a_2 c(\theta_1 + \theta_2) \\ a_1 s \theta_1 + a_2 s(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}, ({}^0\mathbf{R}_0)_3 = ({}^0\mathbf{R}_1)_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Po wykonaniu niezbędnych przekształceń otrzymamy macierz:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s \theta_1 - a_2 s(\theta_1 + \theta_2) & -a_2 s(\theta_1 + \theta_2) \\ a_1 c \theta_1 + a_2 c(\theta_1 + \theta_2) & a_2 c(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Na podstawie pierwszych trzech wierszy macierzy  $\mathbf{J}$  można wyznaczyć prędkość liniową początku układu  $\{2\}$ . Trzeci wiersz tej macierzy jest prędkością liniową w kierunku  ${}^0Z$ , która z oczywistych względów w tym przypadku jest zawsze równa zero. Ostatnie trzy wiersze reprezentują prędkość kątową układu końcowego, która jest po prostu obrotem wokół osi  ${}^0Z$  z prędkością  $\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$ .

### **Kinematyka odwrotna prędkości i przyspieszenia**

Przypomnijmy, że prędkości złączowe i końcówki roboczej są powiązane jakobianem zgodnie z wzorem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (10)$$

Na tej podstawie jakobian może być traktowany jako transformacja wektora prędkości złączowych  $\dot{\mathbf{q}}$  na wektor prędkości zmiennych zadaniowych  $\dot{\mathbf{x}}$ . Równanie (10) opisuje *proste zadanie kinematyki dla prędkości*. Po zróżniczkowaniu (10) otrzymujemy równanie macierzowe opisujące przyspieszenie

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \left( \frac{d}{dt} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (11)$$

Ze względu na sterowanie robota zapewniające realizację zadanej trajektorii ruchu narzędzia, jest niezbędne znalezienie zależności wektora prędkości zmiennych złączowych od wektora prędkości zmiennych zadaniowych, czyli wyznaczenia relacji odwrotnej od (10). Tak sformułowany problem jest nazwany odwrotnym zadaniem kinematyki dla prędkości. Wyznaczenie relacji odwrotnej do (11) nosi nazwę odwrotnego zadania kinematyki dla przyspieszenia.

Równania kinematyki odwrotnej prędkości i przyspieszenia można zapisać w postaci

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{x}} \quad (\text{dla prędkości}) \quad (12a)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{b} \quad (\text{dla przyspieszenia}) \quad (12b)$$

gdzie:  $\mathbf{b} = \ddot{\mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$  i pod warunkiem, że  $\det \mathbf{J}(\mathbf{q}) \neq 0$

W konfiguracjach łańcucha kinematycznego, przy których zachodzi  $\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})) = 0$ , co najmniej jeden wiersz macierzy jacobianowej jest kombinacją liniową pozostałych wierszy i wtedy macierz ta traci rząd. Konfiguracje dla których rząd jacobianu maleje są nazwane *osobliwościami* lub *konfiguracjami osobliwymi*.

#### Literatura:

- [1] Craig J. J.: *Wprowadzenie do robotyki. Mechanika i sterowanie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1995
- [2] Jezierski E.: *Dynamika robotów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006
- [3] Spong M. W., Vidyasagar M.: *Dynamika i sterowanie robotów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1997

#### Informacja o prawach autorskich

*O ile nie zaznaczono inaczej, rysunki i teksty pochodzą z pozycji podanych w literaturze. Niniejsze opracowanie stanowi pomoc do wykładu „Podstawy Robotyki”.*