

7. Dynamika manipulatora

7.1. Formalizm Lagrange'a

Dynamikę złożonych układów, zawierających podzespoły mechaniczne, można opisać w stosunkowo prosty sposób za pomocą formalizmu Lagrange'a, bazującego na zależnościach energetycznych.

Dla manipulatora składającego się z n ogniw połączonych szeregowo, zdefiniujmy uogólniony wektor położenia

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$$

i uogólniony wektor sił działających w złączach,

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2 \ \dots \ \tau_n]^T$$

przy czym składowa τ_k wektora sił odpowiada składowej q_k wektora położenia. Gdzie należy zachować takie samo „strzałkowanie” sił i położen, tzn. dodatnia wartości τ_k powinna powiększać q_k .

Niech E_{kin} i E_{pot} oznaczają odpowiednio: energie kinetyczną i energię potencjalną wszystkich mas układu. *Funkcja Lagrange'a* jest definiowana jako różnica pomiędzy całkowitą energią kinetyczną układu a jego całkowitą energią potencjalną

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \equiv E_{kin}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - E_{pot}(\mathbf{q}) \quad (1)$$

Związki między funkcją Lagrange'a a siłami działającymi w złączach można wyrazić jako układ n równań skalarnych w postaci

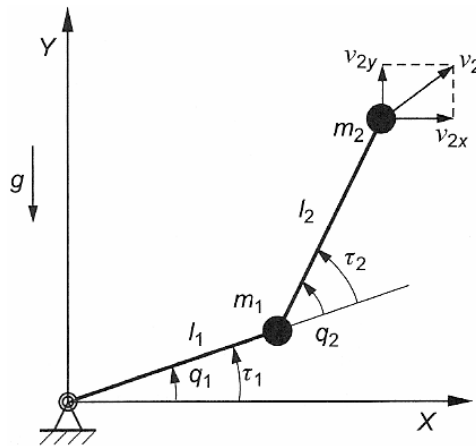
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \tau_k, \quad 1 \leq k \leq n \quad (2)$$

nazwanych *równaniami Eulera-Lagrange'a*. Należy pamiętać, że przy wyznaczaniu pochodnych cząstkowych zmienne q_k i \dot{q}_k są traktowane jako wzajemnie niezależne.

Zestaw równań Eulera-Lagrange'a wynika z zasady najmniejszego działania Hamiltona. W swojej klasycznej postaci zasada ta odnosi się do układu, w którym nie występują siły niepotencjalne, takie jak siły zewnętrzne czy opory ruchu. Wyprowadzenie równań Eulera-Lagrange'a, w przypadku występowania przepływu energii z otoczenia do układu, przedstawiono w [1], dodatek B.

Przykład.

Wyznaczyć równania dynamiki dwuczłonowego manipulatora płaskiego przy użyciu formalizmu Lagrange'a (rys. 1). Założyć, że masy obu ogniw są reprezentowane przez punktowe masy m_1 i m_2 umieszczone na końcach sztywnych i nieważkich prętów. Zespoły napędowe (umieszczone w złączach) generują momenty napędowe τ_1 i τ_2 które powodują przyrosty zmiennych złączowych q_1 i q_2 . Manipulator działa w polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g .



Rys. 1. Model manipulatora płaskiego

Energię kinetyczną i potencjalną masy m_1 można zapisać jako

$$E_{kin,1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{q}_1^2$$

$$E_{pot,1} = m_1 g y_1 = m_1 g l_1 s(q_1)$$

gdzie: v_1 – prędkość liniowa masy m_1 , y_2 – składowa wektora położenia masy m_1 .

Dla masy m_2 postępowanie jest bardziej skomplikowane, ponieważ aby wyznaczyć kwadrat prędkości liniowej v_2^2 , z którą porusza się masa

$$v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$$

najpierw należy wyznaczyć składowe położenia x_2 i y_2 , a następnie zróżniczkować je względem czasu, podnieść do kwadratu i zsumować

$$x_2 = l_1 c(q_1) + l_2 c(q_1 + q_2) \Rightarrow \dot{x}_2 = -l_1 \dot{q}_1 s(q_1) - l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) s(q_1 + q_2)$$

$$y_2 = l_1 s(q_1) + l_2 s(q_1 + q_2) \Rightarrow \dot{y}_2 = l_1 \dot{q}_1 c(q_1) + l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) c(q_1 + q_2)$$

Stąd energię kinetyczną masy m_2 można zapisać jako

$$E_{kin,2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{q}_1^2 + 2l_1 l_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) c(q_2) + l_2^2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2))$$

Energia potencjalna masy m_2 określona jest wzorem

$$E_{pot,2} = m_2 g y_2 = m_2 g (l_1 s(q_1) + l_2 s(q_1 + q_2))$$

Znając energie potencjalne i kinetyczne obu mas można wyznaczyć funkcję Lagrange'a

$$\begin{aligned} L = E_{kin,1} + E_{kin,2} - E_{pot,1} - E_{pot,2} = \\ = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + m_2 l_1 l_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) c(q_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + \\ - m_1 g l_1 s(q_1) - m_2 g l_1 s(q_1) - m_2 g l_2 s(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

Następnie wyznacza się pochodne funkcji Lagrange'a $L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$, patrz równanie (2)

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -m_1 g l_1 c(q_1) - m_2 g l_1 c(q_1) - m_2 g l_2 c(q_1 + q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2 l_1 l_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) s(q_2) - m_2 g l_2 c(q_1 + q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m_1 l_1^2 \dot{q}_1 + m_2 l_2^2 \dot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) c(q_2) + m_2 l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 c(q_2) + m_2 l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = m_1 l_1^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) c(q_2) - m_2 l_1 l_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_2 s(q_2) + m_2 l_2^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = m_2 l_1 l_2 \ddot{q}_1 c(q_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 s(q_2) + m_2 l_2^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)$$

Wyliczone powyżej pochodne są podstawiane do równań Eulera-Lagrange'a (2), w wyniku czego otrzymuje się równania dynamiki rozważanego manipulatora. Równania te można zapisać w postaci następującego równania macierzowo-wektorowego

$$\begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 (l_1^2 + 2l_1 l_2 c(q_2) + l_2^2) & m_2 l_2 (l_1 c(q_2) + l_2) \\ m_2 l_2 (l_1 c(q_2) + l_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) s(q_2) \\ m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1^2 s(q_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 l_1 c(q_1) + m_2 (l_1 c(q_1) + l_2 c(q_1 + q_2)) \\ m_2 l_2 c(q_1 + q_2) \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

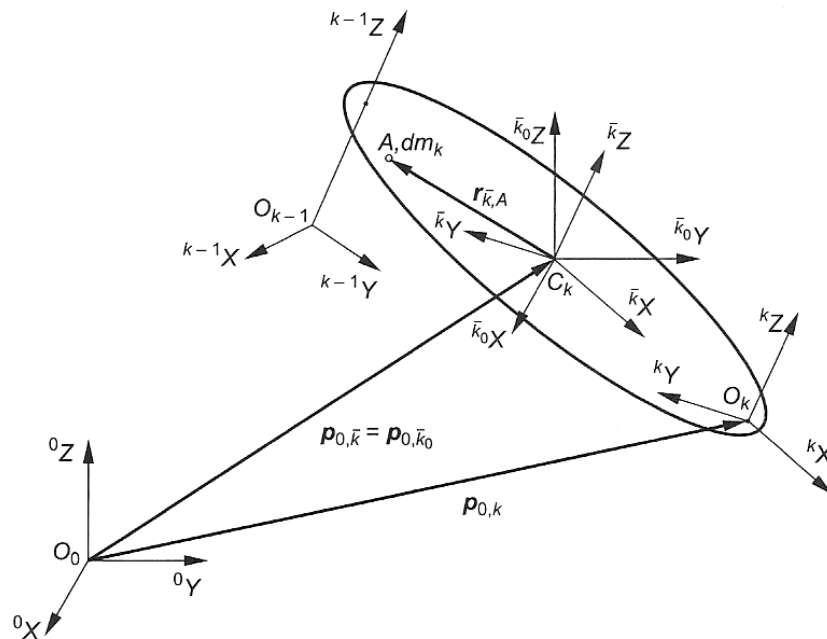
7.2. Energia kinetyczna i potencjalna ogniwa

W rozważanym przykładzie wyprowadzono równania ruchu manipulatora przy założeniu, że cała masa ogniwa jest skupiona na jego końcu. Przybliżenie to nie zawsze daje dobre rezultaty. W celu wyznaczenia równań ruchu z równania Eulera-Lagrange'a dla manipulatora o dowolnej konfiguracji ważne jest aby można było w prosty sposób obliczyć różnice energii kinetycznej i potencjalnej ogniów (tzn. funkcje Lagrange'a).

Poniżej zostanie wyprowadzone równanie określające energię kinetyczną ruchu pojedynczego ogniwa, przy założeniu, że jest ono ciałem idealnie sztywnym. Następnie zostanie wyznaczona energia potencjalna tego ogniwa.

Wielkości związane z ruchem k -tego ogniwa łańcucha kinematycznego, można rozważać w następujących układach współrzędnych (rys. 2):

- w nieruchomym związanym z podstawą robota, układ $\{0\}$
- w układzie związanym z tym ogniwem (zgodnie z notacją D-H układ na końcu ogniwa oznaczony jako $\{k\}$)
- w układzie związanym sztywno z ogniwem, którego początek znajduje się w środku masy ogniwa, układ $\{\bar{k}\}$ (osie tego układu są równoległe do odpowiednich osi układu $\{k\}$)
- w układzie $\{\bar{k}_0\}$ którego początek znajduje się w środku masy ogniwa, a osie są równoległe do odpowiednich osi układu bazowego.



Rys. 2. Układy współrzędnych k -tego ogniwa

Energia kinetyczna elementarnej masy dm_k ogniwa umieszczonej w punkcie A , której położenie określone jest przez wektor ${}^0\mathbf{r}_{0,A}$ wynosi

$$dE_{kin,k} = \frac{1}{2} \left\| {}^0\dot{\mathbf{r}}_{0,A} \right\|^2 dm_k = \frac{1}{2} \left\| {}^0\mathbf{v}_{0,A} \right\|^2 dm_k = \frac{1}{2} {}^0\mathbf{v}_{0,A}^T {}^0\mathbf{v}_{0,A} dm_k \quad (3)$$

Po scałkowaniu powyższego wyrażenia otrzymuje się wzór na energię kinetyczną

$$E_{kin,k} = \int_{m_k} dE_{kin,k} = \frac{1}{2} \int_{m_k} {}^0\mathbf{v}_{0,A}^T {}^0\mathbf{v}_{0,A} dm_k \quad (4)$$

Energię kinetyczną można wyrazić także w układzie $\{\bar{k}\}$ wówczas

$$E_{kin,k} = \frac{1}{2} \int_{m_k} {}^{\bar{k}}\mathbf{v}_{0,A}^T {}^{\bar{k}}\mathbf{v}_{0,A} dm_k \quad (5)$$

Punkt A ma ustalone położenie w układzie $\{\bar{k}\}$, zatem wektor prędkości tego punktu względem układu $\{0\}$, wyrażony w układzie $\{\bar{k}\}$, zależy od ruchu postępowego i obrotowego układu $\{\bar{k}\}$ względem układu $\{0\}$

$${}^{\bar{k}}\mathbf{v}_{0,A} = {}^{\bar{k}}\mathbf{v}_{0,\bar{k}} + {}^{\bar{k}}\boldsymbol{\omega}_{0,\bar{k}} \times {}^{\bar{k}}\mathbf{r}_{0,A} = {}^{\bar{k}}\mathbf{v}_{0,\bar{k}} + S({}^{\bar{k}}\boldsymbol{\omega}_{0,\bar{k}}) {}^{\bar{k}}\mathbf{r}_{0,A} \quad (6)$$

Podstawiając prawą stronę tego równania do wyrażenia na energię kinetyczną po przekształceniach otrzymuje się

$$E_{kin,k} = \frac{1}{2} m_k {}^0\mathbf{v}_{0,\bar{k}}^T {}^0\mathbf{v}_{0,\bar{k}} + \frac{1}{2} {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,\bar{k}}^T {}^0\mathbf{R}_k {}^{\bar{k}}\mathbf{I}_k {}^0\mathbf{R}_k^T {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,\bar{k}} \quad (7a)$$

gdzie ${}^{\bar{k}}\mathbf{I}_k$ jest macierzą bezwładności (inercji) k -tego ogniwa wyrażoną w układzie $\{\bar{k}\}$

$$\bar{k} \mathbf{I}_k = \begin{bmatrix} \int_{m_k} (\bar{k} y_{\bar{k},A}^2 + \bar{k} z_{\bar{k},A}^2) dm_k & - \int_{m_k} \bar{k} x_{\bar{k},A} \bar{k} y_{\bar{k},A} dm_k & - \int_{m_k} \bar{k} x_{\bar{k},A} \bar{k} z_{\bar{k},A} dm_k \\ - \int_{m_k} \bar{k} x_{\bar{k},A} \bar{k} y_{\bar{k},A} dm_k & \int_{m_k} (\bar{k} z_{\bar{k},A}^2 + \bar{k} x_{\bar{k},A}^2) dm_k & - \int_{m_k} \bar{k} y_{\bar{k},A} \bar{k} z_{\bar{k},A} dm_k \\ - \int_{m_k} \bar{k} x_{\bar{k},A} \bar{k} z_{\bar{k},A} dm_k & - \int_{m_k} \bar{k} y_{\bar{k},A} \bar{k} z_{\bar{k},A} dm_k & \int_{m_k} (\bar{k} x_{\bar{k},A}^2 + \bar{k} y_{\bar{k},A}^2) dm_k \end{bmatrix} \quad (7b)$$

Energia kinetyczna tego ogniwa składa się z sumy dwóch składników. Pierwszy reprezentuje energię ruchu postępowego i jest równy energii kinetycznej masy m_k skupionej w środku masy ogniwa C_k . Drugi składnik jest równy energii ruchu obrotowego ogniwa wokół środka masy. Składnik ten uwzględnia fakt, że rozłożone przestrzennie elementarne masy tworzące ogniwo poruszają się z innymi prędkościami niż środek masy ogniwa.

Powyższy wzór na energię ogniwa można zapisać także w postaci

$$E_{kin,k} = \frac{1}{2} m_k {}^0 \mathbf{v}_{0,\bar{k}}^T {}^0 \mathbf{v}_{0,\bar{k}} + \frac{1}{2} {}^0 \boldsymbol{\omega}_{0,\bar{k}}^T \bar{k}_0 \mathbf{I}_k {}^0 \boldsymbol{\omega}_{0,\bar{k}} \quad (8a)$$

gdzie

$$\bar{k}_0 \mathbf{I}_k = \bar{k} \mathbf{R}_{\bar{k}_0}^T \bar{k} \mathbf{I}_k \bar{k} \mathbf{R}_{\bar{k}_0} = {}^0 \mathbf{R}_{\bar{k}}^T \bar{k} \mathbf{I}_k {}^0 \mathbf{R}_{\bar{k}} \quad (8b)$$

Energia potencjalna. Niech ${}^0 \mathbf{g} = [{}^0 g_x \ {}^0 g_y \ {}^0 g_z]$ oznacza wektor grawitacji wyrażony w układzie $\{0\}$. Aby wyznaczyć energię potencjalną k -tego ogniwa najpierw należy wyznaczyć energię potencjalną elementarnej masy dm_k , która jest umieszczona w punkcie A tego ogniwa (położenie tego punktu określa wektor ${}^0 \mathbf{r}_{0,A}$), zatem

$$dE_{pot,k} = - {}^0 \mathbf{g}^T {}^0 \mathbf{r}_{0,A} dm_k = - {}^0 \mathbf{g}^T ({}^0 \mathbf{p}_{0,\bar{k}} + {}^0 \mathbf{R}_{\bar{k}} \bar{k} \mathbf{r}_{\bar{k},A}) dm_k \quad (9)$$

Po scałkowaniu powyższego wyrażenia i przekształceniach otrzymuje się wzór na energię potencjalną tego ogniwa

$$E_{pot,k} = \int_{m_k} dE_{pot,k} = - m_k {}^0 \mathbf{g}^T {}^0 \mathbf{p}_{0,\bar{k}} \quad (10)$$

7.3. Równania ruchu manipulatora

Uzależniając wzór na energię kinetyczną k -tego ogniwa (8a, 8b) od wektora prędkości złączowych \dot{q} łańcucha kinematycznego (zachodzi bowiem związek

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{v}_{0,\bar{k}} \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,\bar{k}} \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{J}_{0,\bar{k}}(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} {}^0\bar{\mathbf{J}}(q) \\ {}^0\hat{\mathbf{J}}(q) \end{bmatrix}\dot{q}$$

gdzie ${}^0\mathbf{J}_{0,\bar{k}}(q)$ jest jacobianem manipulatora wyznaczonym między układem podstawowym $\{0\}$ i układem lokalnym $\{\bar{k}\}$ związanym ze środkiem masy k -tego ogniwa), wyrażenie na energię kinetyczną k -tego ogniwa można zapisać w postaci

$$E_{kin,k} = \frac{1}{2}\dot{q}^T \left(m_k {}^0\bar{\mathbf{J}}_{0,\bar{k}}^T(q) {}^0\bar{\mathbf{J}}_{0,\bar{k}}(q) + {}^0\hat{\mathbf{J}}_{0,\bar{k}}^T(q) {}^0\mathbf{R}_k {}^{\bar{k}}\mathbf{I}_k {}^0\mathbf{R}_k^T {}^0\hat{\mathbf{J}}_{0,\bar{k}}(q) \right) \dot{q} \quad (11)$$

Sumując energie kinetyczne wszystkich ogniw manipulatora, otrzymuje się wzór na energię kinetyczną całego łańcucha kinematycznego

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\dot{q}^T \left(\sum_{k=1}^n \left(m_k {}^0\bar{\mathbf{J}}_{0,\bar{k}}^T(q) {}^0\bar{\mathbf{J}}_{0,\bar{k}}(q) + {}^0\hat{\mathbf{J}}_{0,\bar{k}}^T(q) {}^0\mathbf{R}_k {}^{\bar{k}}\mathbf{I}_k {}^0\mathbf{R}_k^T {}^0\hat{\mathbf{J}}_{0,\bar{k}}(q) \right) \right) \dot{q} \quad (12)$$

Wzór ten można zapisać w zwartej postaci

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{B}(q)\dot{q} \quad (13a)$$

gdzie macierz

$$\mathbf{B}(q) = \sum_{k=1}^n \left(m_k {}^0\bar{\mathbf{J}}_{0,\bar{k}}^T(q) {}^0\bar{\mathbf{J}}_{0,\bar{k}}(q) + {}^0\hat{\mathbf{J}}_{0,\bar{k}}^T(q) {}^0\mathbf{R}_k {}^{\bar{k}}\mathbf{I}_k {}^0\mathbf{R}_k^T {}^0\hat{\mathbf{J}}_{0,\bar{k}}(q) \right) \quad (13b)$$

nazywana jest macierzą *inercji manipulatora*.

Całkowitą energię potencjalną manipulatora (patrz równanie (10)) można wyznaczyć z zależności

$$E_{pot} = -{}^0\mathbf{g}^T \sum_{k=1}^n m_k {}^0\mathbf{p}_{0,\bar{k}}(\mathbf{q}) \quad (14)$$

Na podstawie powyższych rozważań, funkcję Lagrange’a ogólnego modelu dynamiki manipulatora można zapisać w postaci

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E_{kin} - E_{pot} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - E_{pot}(\mathbf{q}) \quad (15)$$

Ogólne równanie dynamiki manipulatora można wyznaczyć korzystając z wektorowej postaci równań Eulera-Lagrange’a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \boldsymbol{\tau} \quad (16)$$

Podstawiając (15) do (16) po przekształceniach otrzymuje się ogólną postać równań ruchu (równań dynamiki) manipulatora o sztywnych ogniwach

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (17a)$$

gdzie:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left(\frac{d\mathbf{B}(\mathbf{q})}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}) \right)^T, \quad \mathbf{h}(\mathbf{q}) = \left(\frac{dE_{pot}}{d\mathbf{q}} \right)^T \quad (17b)$$

Literatura:

- [1] Jezierski E.: *Dynamika robotów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006
- [2] Craig J. J.: *Wprowadzenie do robotyki. Mechanika i sterowanie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1995
- [3] Spong M. W., Vidyasagar M.: *Dynamika i sterowanie robotów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1997

Informacja o prawach autorskich

O ile nie zaznaczono inaczej, rysunki i teksty pochodzą z pierwszej pozycji podanej w literaturze. Niniejsze opracowanie stanowi pomoc do wykładu „Podstawy Robotyki”.