

## 5. Macierze skośnie symetryczne, prędkości w różnych układach współrzędnych

### 5.1. Macierze skośnie symetryczne

Macierz kwadratowa  $S$  stopnia  $n$  jest *macierzą skośnie symetryczną* wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$S + S^T = \mathbf{0} \Rightarrow S^T = -S \quad (1)$$

albo równoważnie

$$s_{ij} = -s_{ji} \quad (2)$$

dla dowolnych indeksów  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Wszystkie elementy głównej przekątnej macierzy skośnie symetrycznej są równe zeru, co wynika z definicji  $s_{ii} = -s_{ii}$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ . Dalej będziemy rozważać wyłącznie macierze skośnie symetryczne, których wszystkie elementy są liczbami rzeczywistymi. Przykład macierzy skośnie symetrycznej stopnia  $n = 3$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -5 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Macierz skośnie symetryczna stopnia  $n$  zawiera  $n$  niezależnych elementów, dla rozważanego przypadku wynosi ona 3.

Przyjmijmy wektor  $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$ , wówczas można zdefiniować *funkcję skośnie symetryczną*  $S(\mathbf{u})$  w następujący sposób

$$S(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Funkcja skośnie symetryczna przekształciła wektor  $\mathbb{R}^3$  w macierz  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Istnieje także funkcja odwrotna do funkcji  $S(\mathbf{u})$  przekształcająca macierz skośnie symetryczną w wektor. Przekształcenie takie jest zapisywane jako

$$\mathbf{u} = \text{inv}S(\cdot), \quad \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (5)$$

Macierzowe funkcje skośnie symetryczne, których argumentami są wersory mają następujące postacie:

$$S(\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S(\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ważną własnością funkcji skośnie symetrycznych jest liniowość. Jeżeli  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  oraz  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  to z definicji (4) otrzymuje się

$$S(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha S(\mathbf{u}) + \beta S(\mathbf{v}) \quad (7)$$

Inną ważną własnością tej funkcji jest relacja

$$S(\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \quad (8)$$

którą łatwo wykazać z definicji iloczynu wektorowego. Dla dowolnie wybranych macierzy obrotu  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{1}$ ,  $\det(\mathbf{R}\mathbf{R}^T) = 1$  i wektorów  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  zachodzi związek

$$\mathbf{R}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{R}\mathbf{u}) \times (\mathbf{R}\mathbf{v}) \quad (9)$$

Dla każdej macierzy obrotu  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{1}$ ,  $\det(\mathbf{R}\mathbf{R}^T) = 1$  i każdej funkcji macierzowej  $S(\mathbf{u})$  zachodzi zależność

$$\mathbf{R}S(\mathbf{u})\mathbf{R}^T = S(\mathbf{R}\mathbf{u}) \quad (10)$$

Założmy teraz, że ortogonalna macierz obrotu  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  jest funkcją jednej zmiennej  $\theta \in \mathbb{R}$ , zatem prawdziwa jest równość

$$\mathbf{R}(\theta)\mathbf{R}^T(\theta) = \mathbf{1} \quad (11)$$

Różniczkując obie strony powyższej zależności względem zmiennej  $\theta$ , otrzymuje się

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\mathbf{R}^T(\theta) + \mathbf{R}(\theta)\frac{d\mathbf{R}^T}{d\theta} = \mathbf{0} \quad (12)$$

co na podstawie następujących własności operacji transponowania  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ ,  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$  można zapisać jako

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\mathbf{R}^T(\theta) + \left[ \frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\mathbf{R}^T(\theta) \right]^T = \mathbf{0} \quad (13)$$

co oznacza (patrz (1)), że  $\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\mathbf{R}^T(\theta)$  jest macierzą skośnie symetryczną zmiennej  $\theta$

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\mathbf{R}^T(\theta) = \mathbf{S}(\theta) \Rightarrow \frac{d\mathbf{R}}{d\theta} = \mathbf{S}(\theta)\mathbf{R}(\theta) \quad (14)$$

Przykład 1. Jeżeli  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(X, \theta)$  jest podstawową macierzą obrotu to

$$\mathbf{S} = \frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\mathbf{R}^T(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S}(\mathbf{i})$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{d\mathbf{R}(X, \theta)}{d\theta} = \mathbf{S}(\mathbf{i})\mathbf{R}(X, \theta) \quad (15a)$$

W wyniku podobnych obliczeń:

$$\frac{d\mathbf{R}(Y, \theta)}{d\theta} = \mathbf{S}(\mathbf{j})\mathbf{R}(Y, \theta), \quad \frac{d\mathbf{R}(Z, \theta)}{d\theta} = \mathbf{S}(\mathbf{k})\mathbf{R}(Z, \theta) \quad (15b)$$

Niech macierz obrotu  $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  będzie funkcją jednej zmiennej, którą jest kąt obrotu  $\theta$  wokół ustalonej osi, zdefiniowanej przez wektor  $\mathbf{u}$ , wówczas

$$\frac{d\mathbf{R}(\mathbf{u}, \theta)}{d\theta} = \mathbf{S}(\mathbf{u})\mathbf{R}(\mathbf{u}, \theta) \quad (16)$$

## 5.2. Prędkości w różnych układach współrzędnych

Dotychczas analizowaliśmy jedynie sytuacje statyczne, tzn. przyjmowaliśmy założenie, że wzajemne położenia i orientacje kolejnych układów współrzędnych nie zmieniają się w czasie. Obecnie zajmiemy się analizą prędkości poszczególnych punktów opisanych w różnych układach współrzędnych. Rozważmy sytuację w której bieżący układ współrzędnych wykonuje obrót z prędkością kątową  $\omega = d\theta/dt$  dookoła osi wyznaczonej przez wektor  $\mathbf{u}$ . Wówczas pochodna macierzy obrotu  $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \theta(t))$  względem czasu przyjmuje postać

$$\frac{d\mathbf{R}(\mathbf{u}, \theta(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{R}(\mathbf{u}, \theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \mathbf{S}(\mathbf{u})\mathbf{R}(\mathbf{u}, \theta)\omega = \mathbf{S}(\omega\mathbf{u})\mathbf{R}(\mathbf{u}, \theta) \quad (17)$$

gdzie:

$$\mathbf{S}(\omega\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega u_z & \omega u_y \\ \omega u_z & 0 & -\omega u_x \\ -\omega u_y & \omega u_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega} \quad (18)$$

$\boldsymbol{\Omega}$  jest interpretowana jako skośnie symetryczna macierz prędkości kątowej ruchu obrotowego układu bieżącego względem układu stałego. Macierz ta (jednoznacznie) odpowiada prędkości kątowej  $\boldsymbol{\omega}$

$$\text{inv}S(\boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \mathbf{u}_x \\ \boldsymbol{\omega} \mathbf{u}_y \\ \boldsymbol{\omega} \mathbf{u}_z \end{bmatrix} \quad (19)$$

Z powyższego zapisu wynika, że kierunek wektora prędkości kątowej  $\boldsymbol{\omega}$  pokrywa się z kierunkiem osi obrotu, wyznaczonej przez wektor  $\mathbf{u}$  ( $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{u}$ ). Na podstawie (17) i (18) macierz prędkości kątowej  $\boldsymbol{\Omega}$  można zapisać jako

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{d\mathbf{R}(\mathbf{u}, \theta(t))}{dt} \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{u}, \theta(t)) \quad (20)$$

Ponieważ każdą macierz obrotu można zapisać w reprezentacji oś-kąt, to macierz prędkości kątowej ruchu obrotowego można zdefiniować w następujący sposób

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} \mathbf{R}^{-1}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) \mathbf{R}^T(t) \quad (21)$$

#### Literatura:

- [1] Craig J. J.: *Wprowadzenie do robotyki. Mechanika i sterowanie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1995
- [2] Jezierski E.: *Dynamika robotów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006
- [3] Spong M. W., Vidyasagar M.: *Dynamika i sterowanie robotów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1997

#### Informacja o prawach autorskich

*O ile nie zaznaczono inaczej, rysunki i teksty pochodzą z pozycji podanych w literaturze.  
Niniejsze opracowanie stanowi pomoc do wykładu „Podstawy Robotyki”.*