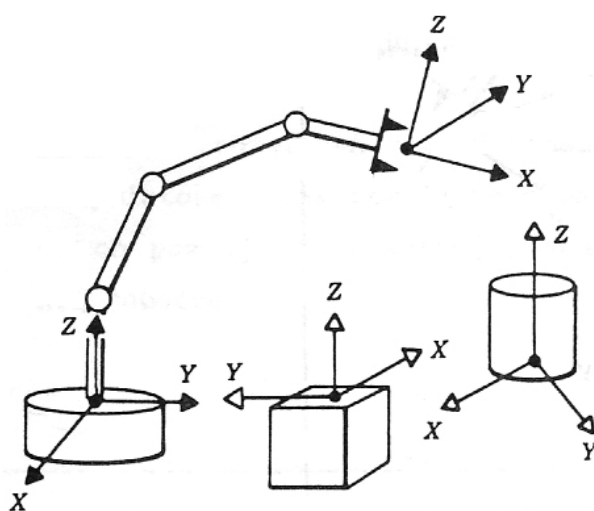


2. Opisy przestrzenne i przekształcenia układów współrzędnych

Wyznaczając trajektorię ruchu końcówki technologicznej manipulatora jesteśmy zainteresowani usytuowaniem obiektów w jego (trójwymiarowej) przestrzeni roboczej. Obiektami tymi są człony manipulatora, narzędzia którymi robot operuje, przedmioty znajdujące się w jego otoczeniu. Obiekty te opisane są przez dwa atrybuty: **pozycję** i **orientację**. W celu matematycznego opisu tych atrybutów do każdego z obiektów (rys. 1) przypisujemy układ współrzędnych. Układy współrzędnych przypisane do obiektów są najczęściej prawoskrętnymi kartezjańskimi układami współrzędnych prostokątnych.



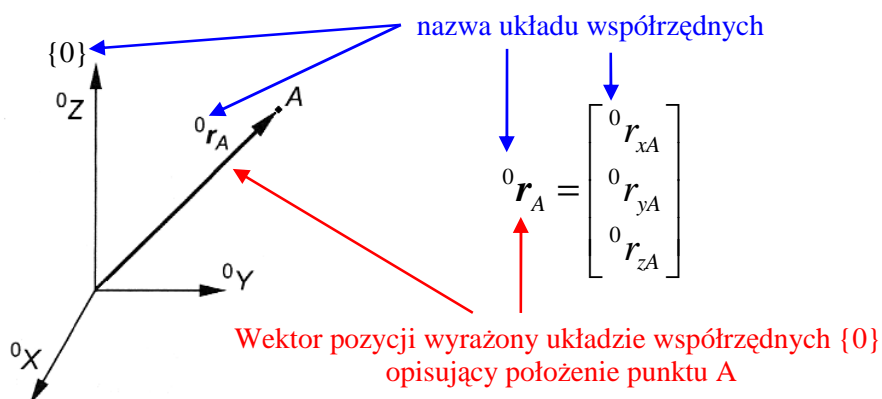
Rys 1. Przypisanie układów współrzędnych do obiektów

Przyjmijmy, że gdzieś w przestrzeni umieszczony jest nieruchomy **globalny układ współrzędnych**. Globalny układ współrzędnych jest najczęściej związany z podstawą manipulatora. Pozycje i orientacje obiektów można opisać względem globalnego (podstawowego) układu współrzędnych lub względem innych kartezjańskich układów współrzędnych.

2.1. Opis pozycji

Położenie dowolnego punktu w przestrzeni można określić za pomocą **wektora pozycji** (3×1). Ze względu na to, że obok globalnego układu współrzędnych będziemy często wprowadzać dodatkowe inne układy współrzędnych, wektory pozycji muszą zawierać informację identyfikującą układ współrzędnych, w których zostały określone.

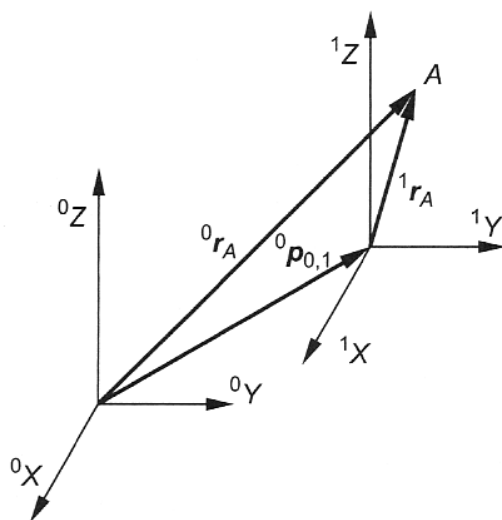
Położenie dowolnie wybranego punktu A opisanego w układzie {0} jest określone za pomocą wektora pozycji ${}^0\mathbf{r}_A$ (rys. 2).



Rys. 2. Wektor pozycji w układzie współrzędnych {0}

2.2. Przesunięcia układów współrzędnych

Opis dowolnie wybranego punktu A w dwóch układach współrzędnych kartezjańskich {0} i {1}, których osie są wzajemnie równoległe, przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Przesunięcie równoległe układów

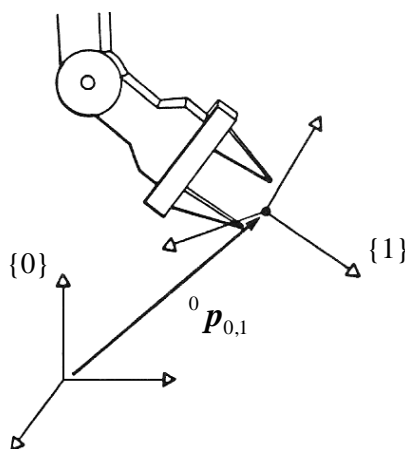
Układ {1} otrzymano przez przesunięcie układu {0} o wektor ${}^0\mathbf{p}_{0,1}$. Położenie punktu A w układzie {0} jest opisane za pomocą wektora ${}^0\mathbf{r}_A$, a w układzie {1} za pomocą wektora ${}^1\mathbf{r}_A$. Wektory te połączone są następującą zależnością

$$\begin{bmatrix} {}^0r_{xA} \\ {}^0r_{yA} \\ {}^0r_{zA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0p_{x0,1} \\ {}^0p_{y0,1} \\ {}^0p_{z0,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^1r_{xA} \\ {}^1r_{yA} \\ {}^1r_{zA} \end{bmatrix}.$$

Dalej równość ta będzie zapisywana w zwartej postaci ${}^0r_A = {}^0p_{0,1} + {}^1r_A$.

2.3. Opis orientacji (obroty układów współrzędnych)

W celu opisu orientacji ciała wiążemy z nim układ współrzędnych, a następnie opisujemy orientację tego układu współrzędnych względem układu odniesienia.



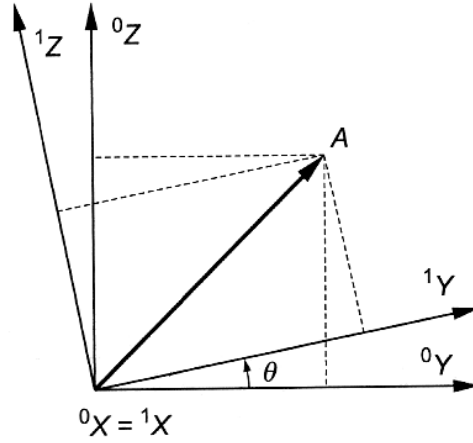
Rys. 4. Usytuowanie obiektu co do pozycji i orientacji

Układ współrzędnych {1}, związany z ciałem (rys. 4) jest przesunięty i obrócony względem układu {0}. W celu znalezienia orientacji układu {1} względem układu {0} należy początki układów umieścić w tym samym punkcie.

2.3.1. Obroty podstawowe

Jeżeli układ współrzędnych {1} otrzymano przez obrót układu podstawowego {0} wokół jednej z jego osi, to taki obrót nazywany jest **podstawowym**, a odpowiadające mu przekształcenie **obrotem podstawowym**.

W przestrzeni \mathbf{R}^3 występują trzy możliwości takich obrotów. Pierwszy z nich, obrót wokół osi X, przedstawiono na rys. 5. Punkt A może być opisany za pomocą wektora 0r_A lub 1r_A odpowiednio w układzie {0} lub {1}. Zależności pomiędzy tymi wektorami są zapisane następującym związkiem macierzowym:



Rys. 5. Obrót układu {0} wokół osi ${}^0\mathbf{X}$ o kąt θ

$$\begin{bmatrix} {}^0r_{xA} \\ {}^0r_{yA} \\ {}^0r_{zA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1r_{xA} \\ {}^1r_{yA} \\ {}^1r_{zA} \end{bmatrix}$$

lub w zwartej postaci ${}^0\mathbf{r}_A = \mathbf{R}(X, \theta) {}^1\mathbf{r}_A$, gdzie

$$\mathbf{R}(X, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

jest podstawową macierzą obrotu wokół osi X.

Pozostałe dwie podstawowe macierze obrotu odpowiednio wokół osi Y i Z mają postać

$$\mathbf{R}(Y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(Z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Z każdym podstawowym obrotem układu {0} można związać transformację obrotu

$${}^0\mathbf{r}_A = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{r}_A.$$

Macierz obrotu jest macierzą ortogonalną, a zatem

$${}^0\mathbf{R}_1 = {}^1\mathbf{R}_0^{-1} = {}^1\mathbf{R}_0^T.$$

2.3.2. Obroty złożone

Obrót złożony powstaje w wyniku wykonania sekwencji obrotów podstawowych. Macierz obrotu złożonego jest iloczynem kolejno mnożonych przez siebie podstawowych macierzy obrotu.

Przykład:

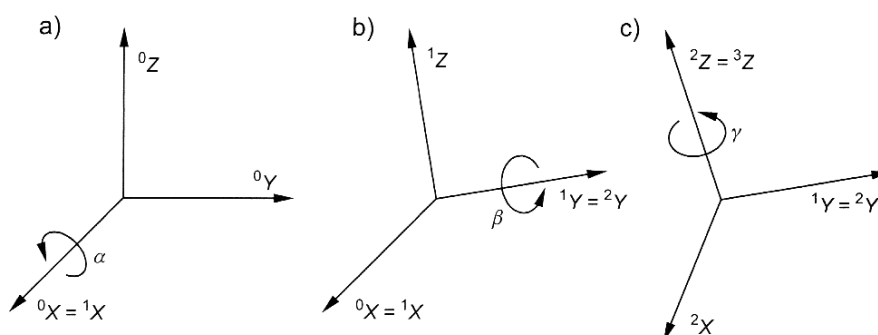
Układ {1} powstał z układu {0} przez pewien obrót podstawowy, a następnie układ {2} przez pewien obrót podstawowy układu {1}. Niech wektory opisują położenie punktu A w tych trzech układach. Wówczas zachodzą następujące związki ${}^0\mathbf{r}_A = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{r}_A$, ${}^1\mathbf{r}_A = {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{r}_A$. Zatem obrót złożony jest opisany relacją

$${}^0\mathbf{r}_A = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{r}_A = {}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{r}_A.$$

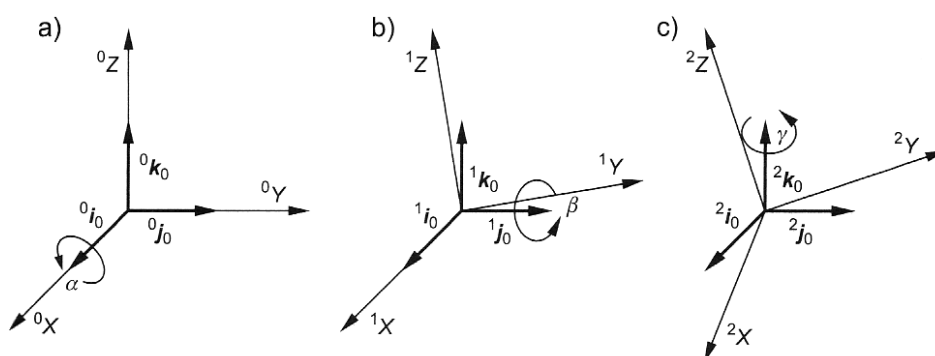
Ponieważ mnożenie macierzy nie jest przemienne ($AB \neq BA$), przy składaniu obrotów należy zwrócić uwagę na kolejność ich wykonywania. **Macierz obrotu złożonego, będąca iloczynem macierzy podstawowych, jest macierzą ortogonalną.**

Dowolne obroty złożone, układu współrzędnych w przestrzeni \mathbf{R}^3 , względem innego układu współrzędnych można opisać według dwóch konwencji:

- obroty wykonywane wokół osi układów bieżących (rys. 6)
- obroty wykonywane wokół osi układu stałego (rys. 7)



Rys. 6. Kolejne obroty X-Y-Z wokół bieżących osi



Rys. 7. Kolejne obroty wokół stałych osi

Dowolny obrót układu współrzędnych jest złożeniem trzech kolejnych obrotów wokół osi bieżących. Przy ich określeniu należy podać trzy kolejne nazwy osi i kąty obrotu wokół nich. Kąty te nazwano kątaami Eulera a odpowiadające im obroty obrotami Eulera. Możliwych jest 12 obrotów Eulera:

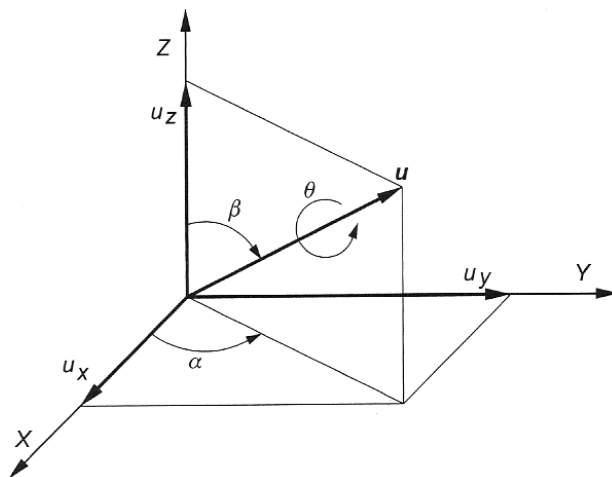
- | | | |
|----------|----------|-----------|
| 1) X-Y-Z | 5) Z-X-Y | 9) Y-X-Y |
| 2) X-Z-Y | 6) Z-Y-X | 10) Y-Z-Y |
| 3) Y-X-Z | 7) X-Y-X | 11) Z-X-Z |
| 4) Y-Z-X | 8) X-Z-X | 12) Z-Y-Z |

Wszystkie układy obrotów są równoważne, jednak najbardziej naturalnym jest układ o kolejności X-Y-Z (rys. 6). Odpowiadająca mu macierz obrotu ma postać:

$$\mathbf{R}_{X-Y-Z}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{R}(X, \alpha) \mathbf{R}(Y, \beta) \mathbf{R}(Z, \gamma) = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma & s\beta \\ s\alpha s\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta \\ -c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta \end{bmatrix}.$$

2.3.3. Obrót wokół dowolnej osi

Rozważmy obrót wokół dowolnie wybranego wektora jednostkowego $\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T$ o zadany kąt θ (rys. 8).



Rys. 8. Obrót wokół dowolnej osi

Obrót taki można otrzymać przez złożenie pięciu kolejnych podstawowych obrotów:

- 1) obrót o kąt α wokół osi Z,
- 2) obrót o kąt β wokół bieżącej osi Y (po tych obrotach oś Z pokrywa się z kierunkiem wektora \mathbf{u}),
- 3) obrót o kąt θ wokół bieżącej osi Z,

4) obrót o kąt $-\beta$ wokół osi Y,

5) obrót o kąt $-\alpha$ wokół bieżącej osi Z

Rozpatrywany obrót złożony ma postać: $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \theta) = \mathbf{R}(Z, \alpha) \mathbf{R}(Y, \beta) \mathbf{R}(Z, \theta) \mathbf{R}(Y, -\beta) \mathbf{R}(Z, -\alpha)$.

Podstawiając do poprzedniego wzoru macierze obrotów podstawowych oraz korzystając z relacji pomiędzy składowymi wektora \mathbf{u} a funkcjami trygonometrycznymi kątów α i β :

$$\cos \alpha = \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}, \quad \cos \beta = u_z, \quad \sin \beta = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

po obliczeniach otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{u}, \theta) &= \begin{bmatrix} u_x u_x (1 - \cos \theta) + \cos \theta & u_x u_y (1 - \cos \theta) - u_z s \theta & u_x u_z (1 - \cos \theta) + u_y s \theta \\ u_y u_x (1 - \cos \theta) + u_z s \theta & u_y u_y (1 - \cos \theta) + \cos \theta & u_y u_z (1 - \cos \theta) - u_x s \theta \\ u_z u_x (1 - \cos \theta) - u_y s \theta & u_z u_y (1 - \cos \theta) + u_x s \theta & u_z u_z (1 - \cos \theta) + \cos \theta \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{u} \mathbf{u}^T (1 - \cos \theta) + \begin{bmatrix} \cos \theta & -u_z \sin \theta & u_y \sin \theta \\ u_z \sin \theta & \cos \theta & -u_x \sin \theta \\ -u_y \sin \theta & u_x \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1) \end{aligned}$$

Macierz obrotu złożonego wokół dowolnego wektora jednostkowego o kąt θ jest macierzą ortogonalną oraz prawdziwe są następujące zależności:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, -\theta) = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{u}, \theta) = \mathbf{R}^T(\mathbf{u}, \theta)$$

$$\mathbf{R}(-\mathbf{u}, -\theta) = \mathbf{R}(\mathbf{u}, \theta)$$

2.3.4. Reprezentacja oś kąt

Dla dowolnej macierzy o postaci

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

spełniającej warunki: $\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ i $\det(\mathbf{R}) = 1$ można znaleźć wektor \mathbf{u} i kąt θ jeśli zauważy się że śląd macierzy $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \theta)$ po skorzystaniu ze związku $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = \|\mathbf{u}\|^2 = 1$ ma postać $\text{Tr}(\mathbf{R}(\mathbf{u}, \theta)) = 1 + 2 \cos \theta$. Stąd kąt θ dla dowolnej macierzy obrotu \mathbf{R} można wyznaczyć z zależności:

$$\theta = \arccos \frac{\text{Tr}(\mathbf{R}) - 1}{2} = \arccos \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}.$$

Porównując wyrazy macierzy $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \theta)$ położone symetrycznie względem głównej przekątnej

$$r_{32} - r_{23} = 2u_x \sin \theta, \quad r_{13} - r_{31} = 2u_y \sin \theta, \quad r_{21} - r_{12} = 2u_z \sin \theta$$

można otrzymać wektor \mathbf{u} z równania

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}.$$

2.3.5. Obroty złożone wykonywane wokół osi układu stałego

Podobnie jak w przypadku kątów Eulera, możliwych jest 12 złożań obrotów wokół tych osi układu stałego. Podstawowym złożeniem obrotów (wokół stałych osi) są trzy kolejne obroty wykonane wokół osi 0X , 0Y , 0Z , odpowiednio o kąty α , β , γ (rys. 7). Konwencja zapisu obrotu w tej postaci utożsamiana jest z kiścią manipulatora, gdzie aby odpowiednio zorientować narzędzie wykonywane są obroty wokół jej osi. Kąty te zwyczajowo nazywa się:

- yaw (odchylenie) – wokół stałej osi X,
- pitch (pochylenie) – wokół stałej osi Y,
- roll (obróć) – wokół stałej osi Z.

Wypadkowa macierz obrotu wokół wersorów układu podstawowego $\{0\}$ w kolejności jak na rys. 7, odpowiednio kąty α , β , γ ma postać:

$$\mathbf{R}_{XYZ}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{R}({}^0\mathbf{i}_0, \alpha) \mathbf{R}({}^0\mathbf{j}_0, \beta) \mathbf{R}({}^0\mathbf{k}_0, \gamma)$$

Wersory jednostkowe ${}^0\mathbf{i}_0$, ${}^0\mathbf{j}_0$, ${}^0\mathbf{k}_0$ są trzema kolejnymi kolumnami macierzy jednostkowej:

$${}^0\mathbf{i}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^0\mathbf{j}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^0\mathbf{k}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Układ współrzędnych $\{1\}$ powstał w wyniku obrotu układu $\{0\}$ wokół osi 0X czyli wokół wersora ${}^0\mathbf{i}_0$. Zależność pomiędzy opisem dowolnie wybranego wektora \mathbf{r}_A w obu tych układach współrzędnych wyraża równanie

$${}^0\mathbf{r}_A = {}^0\mathbf{R}_1 \mathbf{r}_A = \mathbf{R}({}^0\mathbf{i}_0, \alpha) {}^1\mathbf{r}_A = \mathbf{R}(X, \alpha) {}^1\mathbf{r}_A$$

Opis wersorów układu $\{0\}$ wyrażonych w układzie $\{1\}$ można znaleźć przeprowadzając następujące działania

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{i}_0 &= \mathbf{R}(X, \alpha) {}^1\mathbf{i}_0, \quad {}^0\mathbf{j}_0 = \mathbf{R}(X, \alpha) {}^1\mathbf{j}_0, \quad {}^0\mathbf{k}_0 = \mathbf{R}(X, \alpha) {}^1\mathbf{k}_0 \\ \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{i}_0 & {}^0\mathbf{j}_0 & {}^0\mathbf{k}_0 \end{bmatrix} &= \mathbf{R}(X, \alpha) \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{i}_0 & {}^1\mathbf{j}_0 & {}^1\mathbf{k}_0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{i}_0 & {}^1\mathbf{j}_0 & {}^1\mathbf{k}_0 \end{bmatrix} &= \mathbf{R}^{-1}(X, \alpha) = \mathbf{R}^T(X, \alpha) \end{aligned}$$

Drugi obrót wykonywany jest wokół wektora ${}^1\mathbf{j}_0 = [0 \quad \cos \alpha \quad -\sin \alpha]^T$ o kąt β . Macierz obrotu znajdujemy ze wzoru (1)

$$\mathbf{R}({}^1\mathbf{j}_0, \beta) = \begin{bmatrix} 0 \\ c\alpha \\ -s\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c\alpha & -s\alpha \end{bmatrix} (1 - c\beta) + \begin{bmatrix} c\beta & s\alpha s\beta & c\alpha s\beta \\ -s\alpha s\beta & c\beta & 0 \\ -c\alpha s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix}$$

Wykonując iloczyn $\mathbf{R}(X, \alpha)\mathbf{R}({}^1\mathbf{j}_0, \beta)$ otrzymuje się:

$$\mathbf{R}_{XY}(\alpha, \beta) = \mathbf{R}(X, \alpha)\mathbf{R}({}^1\mathbf{j}_0, \beta) = \begin{bmatrix} c\beta & s\alpha s\beta & c\alpha s\beta \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ -s\beta & s\alpha c\beta & c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

Jak można zauważyć, otrzymana macierz obrotu złożonego równa jest iloczynowi dwóch obrotów podstawowych, to jest $\mathbf{R}(Y, \beta)\mathbf{R}(X, \alpha)$. Złożona macierz obrotów wykonanych wokół stałych osi, najpierw o kąt α wokół osi 0X , następnie o kąt β wokół osi 0Y , jest równa iloczynowi macierzy obrotów podstawowych wykonanych w odwrotnej kolejności

$$\mathbf{R}_{XY}(\alpha, \beta) = \mathbf{R}(Y, \beta)\mathbf{R}(X, \alpha)$$

Zasada ta jest słuszna dla dowolnych obrotów wokół stałych osi. Dla rozważanego przypadku otrzymuje się

$$\mathbf{R}_{XYZ}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{R}(Z, \gamma)\mathbf{R}(Y, \beta)\mathbf{R}(X, \alpha)$$

2.4. Przekształcenia jednorodne

Najbardziej ogólny przypadek przemieszczenia układu współrzędnych może być wyrażony przez kombinację czystego przesunięcia i czystego obrotu, co określa ruch sztywny (rys. 9). W wyniku przesunięcia układu $\{0\}$ o wektor ${}^0\mathbf{p}_{0,1}$ powstaje układ $\{1\}$. Układ $\{1\}$ otrzymano przez obrót układu $\{1\}$ zgodnie z macierzą obrotu ${}^0\mathbf{R}_1$.

Związek pomiędzy dowolnie wybranym punktem A w układach $\{0\}$ i $\{1\}$ ma postać

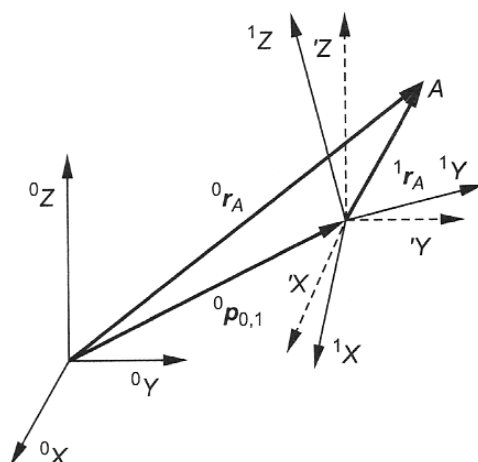
$${}^0\mathbf{r}_A = {}^0\mathbf{p}_{0,1} + {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{r}_A$$

Przekształcenie to definiuje ruch sztywny.

Zapis definiujący ruch sztywny jest bardziej złożony, niż zapis samych przesunięć lub samych obrotów. Aby go uprościć zapisuje się go w postaci zwartej jako

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{r}_A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_1 & {}^0\mathbf{p}_{0,1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{r}_A \\ 1 \end{bmatrix} \text{ lub jeszcze prościej } {}^0\hat{\mathbf{r}}_A = {}^0\mathbf{H}_1 {}^1\hat{\mathbf{r}}_A,$$

gdzie: $\mathbf{0} = [0 \quad 0 \quad 0]$.



Rys. 9. Przesunięcie równoległe i obrót układu współrzędnych

Macierz 0H_1 nazwana jest macierzą jednorodną przekształcenia.

Wektor ${}^0\hat{r}_A$ nazwany jest reprezentacją jednorodną wektora 0r_A .

Macierz odwrotna do macierzy przekształcenia jednorodnego (przekształcenie odwrotne) przybiera postać

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

Szczególnym przypadkiem macierzy jednorodnych przekształceń H jest:

jednorodna macierz obrotu

$$Rot(u, \theta) = \begin{bmatrix} R(u, \theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

oraz jednorodna macierz przesunięcia

$$Trans(p) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & p \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

Literatura:

- [1] Craig J. J.: *Wprowadzenie do robotyki. Mechanika i sterowanie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1995
- [2] Jezierski E.: *Dynamika robotów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006
- [3] Spong M. W., Vidyasagar M.: *Dynamika i sterowanie robotów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1997

Informacja o prawach autorskich

O ile nie zaznaczono inaczej, rysunki i teksty pochodzą z pozycji podanych w literaturze.
Niniejsze opracowanie stanowi pomoc do wykładu „Podstawy Robotyki”.