

# Zespół Szkół Technicznych im. J. i J. niadeckich w Grudzi dzu



Laboratorium Elektryczne . Pracownia Automatyki i  
Robotyki (s.48)

## Instrukcja Laboratoryjna: **2.Rezonans w obwodach elektrycznych**

Opracował mgr in . Marcin Jabło ski

Celem ćwiczenia jest do wiadczenie sprawdzenie podstawowych właściwości szeregowych i równoległych rezonansowych obwodów elektrycznych.

## **2.1. Wiadomości ogólne**

### **2.1.1 Rezonans napięcia**

### **2.1.2 Rezonans prądów**

## **2.2. Badania laboratoryjne**

### **2.2.1 Rezonans napięcia**

#### **2.2.1.1 Badanie wpływu pojemności na rezonans napięcia**

#### **2.2.1.2 Charakterystyki czystościowe**

### **2.2.2 Rezonans prądów**

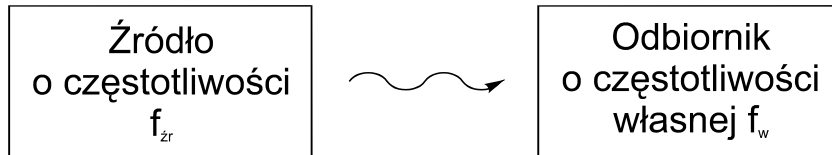
#### **2.2.2.1 Badanie wpływu pojemności na rezonans prądów**

#### **2.2.2.2 Charakterystyki czystościowe**

## **2.3. Uwagi i wnioski**

## 2.1. Wiadomości ogólne

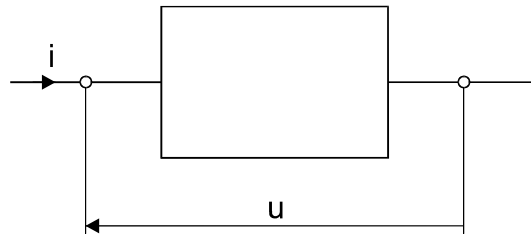
Zjawisko rezonansu występuje w różnych układach fizycznych i pojawia się wtedy, gdy układ jest poddany pobudzeniom okresowym  $f_r$  o częstotliwości równej częstotliwości drgań własnych układu  $f_w$ , czyli  $f_w = f_r$ .



Rys. 2.1. Mechanizm pobudzenia rezonansowego

*W rezonansie elektrycznym częstotliwość źródła równa jest częstotliwości własnej obwodu, która zależy jedynie od wartości indukcyjności  $L$  i pojemności  $C$ . Warunkiem koniecznym (ale nie dostatecznym) wystąpienia rezonansu elektrycznego jest to, aby obwód zawierał zarówno kondensatory, jak i cewki.*

Rozpatrzmy obwód elektryczny przedstawiony na rys.2.2.



Rys. 2.2. Odbiornik w obwodzie elektrycznym

Symbole  $u$ ,  $i$  oznaczają wartości chwilowe sinusoidalnie zmiennego napięcia na odbiorniku oraz sinusoidalnie zmiennego prądu w odbiorniku. Odbiornik to szeregowe lub równoległe połączenie elementów  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . Stosując prawo Ohma dla wartości skutecznych prądu  $i$  i napięcia  $u$  można napisać:

dla połączenia szeregowego

$$\frac{U}{I} = Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad X = X_L - X_C \quad (2.1)$$

dla połączenia równoległego

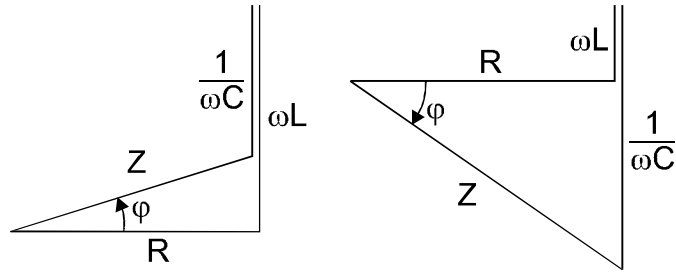
$$\frac{I}{U} = Y = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad B = B_C - B_L \quad (2.2)$$

gdzie:  $Z$  - moduł impedancji,  $Y$  - moduł admittancji,  $R$  - rezystancja,  $X$  - reaktancja,  $G$  - konduktancja,  $B$  - susceptancja.

**Rezonans można zdefiniować również jako stan obwodu, w którym reaktancja odbiornika lub susceptancja odbiornika są równe zero.**

Jeżeli w odbiorniku istnieje szeregowe połączenie elementów  $R$ ,  $C$ ,  $L$  i jest prawdziwy warunek  $X=0$ , to występuje **rezonans szeregowy** nazywany również **rezonansem napięcia**.

Jeżeli w odbiorniku istnieje równoległe połączenie elementów  $R$ ,  $C$ ,  $L$  i występuje warunek  $B=0$  to odbiornik jest w stanie **rezonansu równoległego** nazywanego również **rezonansem prądów**.



Rys. 2.3. Trójkąt impedancji: a)  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ ; b)  $\omega L < \frac{1}{\omega C}$

Z analizy trójkątów rezystancji przedstawionych na rys.2.3 wynika, że dla przypadku rezonansu, tzn.  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$  prawdziwe są zależności:  $\varphi=0$ ,  $Z=R$ , czyli w obwodzie z rezonansem nie ma przesunięcia fazowego między prądem i napięciem. Obwód zachowuje się tak, jakby istniał w nim tylko rezystancja.

W stanie rezonansu moc czynna wynosi:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \phi = U \cdot I \quad (2.3)$$

a moc bierna:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \phi = 0 \quad (2.4)$$

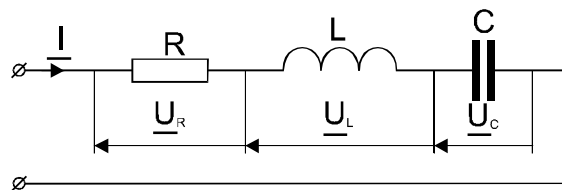
gdzie  $\varphi=0$ .

Oznacza to, że cała energia elektryczna pobrana przez obwód przekształca się w ciepło w jego rezystancji R. Energia bierna przekazywana jest między elementami L i C z pominięciem źródła.

**Inna definicja rezonansu elektrycznego podaje, że jest to stan obwodu, w którym występuje całkowita wewnętrzna wymiana energii biernych.**

### 2.1.1. Rezonans napięci

Rozpatrzmy obwód składający się z elementów R, L i C połączonych szeregowo - rys. 2.4.



Rys. 2.4. Obwód szeregowy R, L, C

Moduł impedancji Z w tym obwodzie:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (2.1)$$

gdzie  $X_L = \omega L$ ,  $X_C = \frac{1}{\omega C}$

oraz

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (2.2)$$

Ponieważ przy rezonansie nie ma przesunięcia fazowego między prądem i napięciem  $\varphi=0$ , to:

$$\operatorname{tg} \phi = 0,$$

a stąd

$$X_L = X_C$$

czyli

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (2.5)$$

gdzie  $\omega = 2\pi f$ .

Równanie (2.5) pozwala określić warunki, jakie powinny być spełnione, aby w obwodzie z rys.2.4. występował rezonans.

W przypadku, gdy obwód zasilany jest ze źródła o stałej częstotliwości  $f$ , stan rezonansu można uzyskać regulując wartość indukcyjności  $L$  lub pojemności  $C$  (w praktyce dostraja się obwód do rezonansu stosując kondensator o regulowanej pojemności).

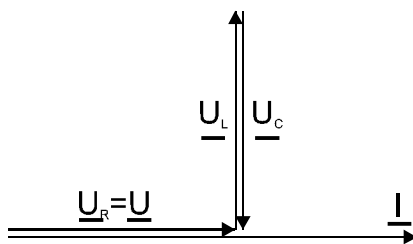
Aby uzyskać rezonans w obwodzie o ustalonych wartościach  $L$  i  $C$ , należy zastosować źródło napięcia o regulowanej częstotliwości. Częstotliwość, przy której występuje rezonans nazywamy **częstotliwością rezonansową**  $f_r$ . Wartość częstotliwości  $f_r$  otrzymamy z równania (2.5)

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.6)$$

lub

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (2.7)$$

Wykres wskazowy obwodu szeregowego w stanie rezonansu przedstawia rys.2.5.



**Rys. 2.5.** Wykres wskazowy szeregowego obwodu szeregowego RLC w stanie rezonansu napięcia

Należy zauważyć, że w stanie rezonansu szeregowego, czyli rezonansu napięcia, występuje równowaga między napięciami na cewce i kondensatorze  $U_L = U_C = 0$ . Przy pewnych wartościach rezystancji  $R$ , indukcyjności  $L$  i pojemności  $C$  - napięcia  $U_L$  i  $U_C$  mogą przybierać stosunkowo duże wartości, mimo że napięcie zasilające obwód  $U$  jest stosunkowo małe. Mówimy wówczas, że w obwodzie występuje **przepięcie**.

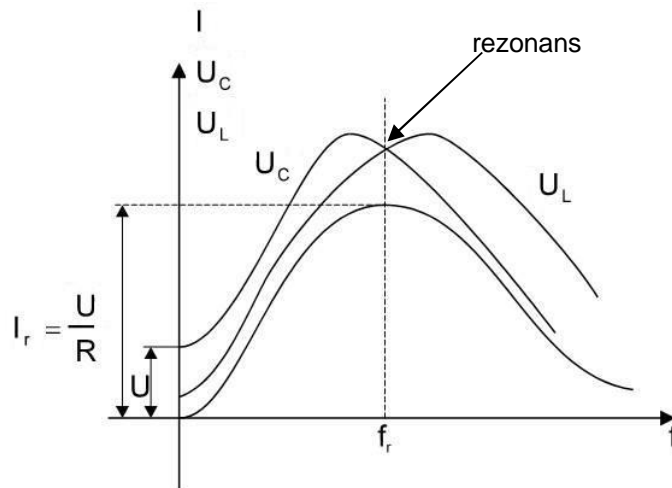
Dla zilustrowania właściwości obwodu rezonansowego wykreślamy charakterystyki częstotliwościowe. Są to charakterystyki przedstawiające zależności prądu  $I$ , napięć  $U_L$  oraz  $U_C$  od częstotliwości napięcia zasilającego obwód. Charakterystyki częstotliwościowe obwodu rezonansowego otrzymujemy się na podstawie poniższych zależności:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad (2.8)$$

$$U_L = I \cdot X_L \quad (2.9)$$

$$U_C = I \cdot X_C \quad (2.10)$$

Na rysunku 2.6 przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe badanych wielkości.



**Rys. 2.6.** Charakterystyki czystolukciowe

W miar zwi kszania cz stotliwoci reaktancja indukcyjna  $X_L$  wzrasta liniowo, za reaktancja pojemnociowa  $X_C$  maleje hiperbolicznie. Przy małych cz stotliwociach w obwodzie pnie pr d o małej warto ci wyprzedzaj cy napi cie o k t bliski  $90^\circ$  (obwód ma wtedy charakter pojemnociowy). Przy wielkich cz stotliwociach w obwodzie pnie pr d o małych warto ciach opó niony wzgl dem napi cia o k t bliski  $90^\circ$  (obwód ma wtedy charakter indukcyjny).

Przy cz stotliwoci rezonansowej  $f=f_r$  warto ci reaktancji  $X_L$  i  $X_C$  s sobie równe, a pr d I osi ga najwi ksz warto ograniczon jedynie rezystancj  $R$  w obwodzie ( $I_r = \frac{U}{R}$ ).

Napi cie  $U_C$  osi ga warto maksymaln dla cz stotliwoci tu przed rezonansem, natomiast napi cie  $U_L$  tu po rezonansie. Przy cz stotliwoci rezonansowej napi cia  $U_C$  i  $U_L$  s sobie równe.

Zale no pr du I w obwodzie od cz stotliwoci  $f$  (rys.2.6), nazywana jest cz sto **krzyw rezonansow obvodu**. Kszta tej krzywej zale ny jest gównie od stosunku reaktancji indukcyjnej  $X_L$  do rezystancji  $R$  obvodu.

Iloraz ten nosi nazw **dobroci obvodu**:

$$Q = \frac{X_L}{R} = \frac{2\pi fL}{R} \quad (2.11)$$

Dobro obvodu jest funkcj cz stotliwoci, przy cz stotliwoci rezonansowej przyjmuje ona warto :

$$Q_r = \frac{2\pi f_r L}{R} \quad (2.12)$$

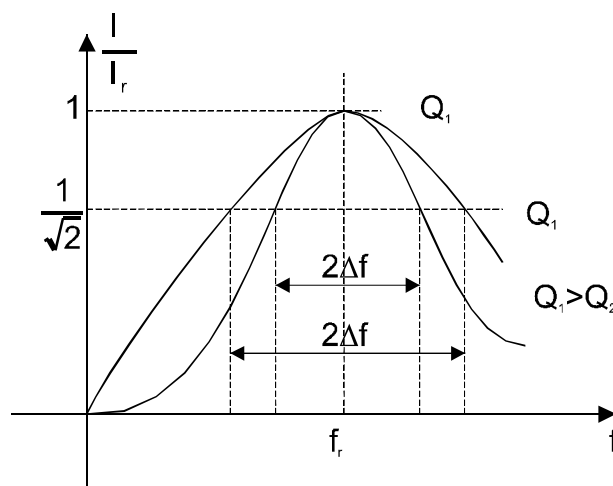
W stanie rezonansu napi cie na indukcyjnoci jest równe:

$$U_{Lr} = I_r \cdot X_{Lr} = \frac{U}{R} \cdot X_{Lr} = U \cdot Q_r \quad (2.13)$$

Napi cie to, równe napi ciu na kondensatorze, mo e by  $Q_r$  razy wi ksze od napi cia zasilaj cego. Ten  $Q_r$ -krotny wzrost napi cia na kondensatorze lub cewce jest zjawiskiem niekorzystnym ze wzgl du na mo liwo przebicia kondensatora lub izolacji cewki, natomiast zjawiskiem korzystnym w przypadku wielu obwodów elektronicznych, uniemo liwiaj cym generowanie napi o okre lonych cz stotliwociach. W obwodach radiotechnicznych  $Q$  mo e przybiera warto ci od 50 do 200.

Na rysunku 2.7 przedstawiono krzywe rezonansowe obwodów o ró nych warto ciach dobroci.

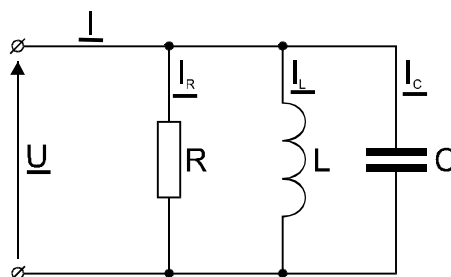
Taki sposób przedstawienia krzywych rezonansowych ułatwia znacznie analizę wartości obwodu rezonansowego. Z rysunku 2.7 wynika, że im większe dobroć obwodu rezonansowego, tym ostrzejsza jest krzywa rezonansowa. Dobroć obwodu w zasadzie jest określona jako wartość cewki, ponieważ w niej koncentrują się prawie wszystkie straty energii w obwodzie. W obwodzie o dostatecznie dużej dobroci (rzędu kilkudziesięciu), nawet przy małych odstrojeniach od częstotliwości rezonansowej, prąd będzie gwałtownie maleć w porównaniu z jego wartością przy rezonansie. Oznacza to, że tylko różnice częstotliwości zbliżonych do częstotliwości rezonansowej obwodu mogą spowodować, że moduł impedancji obwodu rezonansowego jest równy jego rezystancji lub do niej zbliżony. Inaczej - obwód osiąga minimalną impedancję w określonym paśmie częstotliwości. To jego wąskie określenie nazywamy **pasma przepuszczania obwodu**, tzn. pasma  $2\Delta f$ , w otoczeniu częstotliwości rezonansowej  $f_r$ , w którego końcach wartość skuteczna prądu  $I$  w obwodzie spada do  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$  wartości tego prądu przy rezonansie (patrz rys.2.7). Szerokość pasma przepuszczania  $2\Delta f$  stanowi zwykle 0,3...2% częstotliwości rezonansowej.



Rys. 2.7. Krzywe rezonansowe obwodów o różnych wartościach dobroci  $Q$

Zdolność obwodu do przepuszczania prądów o częstotliwościach zbliżonych do częstotliwości rezonansowej i praktycznie nieprzepuszczania prądów o innych częstotliwościach nosi nazwę **selektywności obwodu**. Selektowność obwodu jest tym większa, im mniejsze jest jego pasmo przepuszczania, czyli im większe ma on dobroć. Selektowność obwodu jest szeroko wykorzystywana w radiotechnice.

### 2.1.2. Rezonans prądów



Rys. 2.8. Obwód równoległy R, L, C

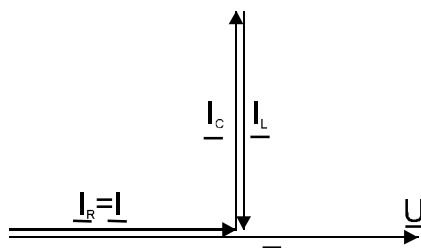
Rozpatrzmy obwód składający się z elementów R, L, C połączonych równolegle (rys.2.8)

Na rysunku 2.9 przedstawiono wykres wskazowy dla tego obwodu przy założeniu, że w obwodzie występuje rezonans, a więc kąt przesunięcia fazowego między prądem  $I$ , a napięciem  $U$  jest równy zeru.

W stanie rezonansu równoległego, czyli rezonansu prądów mamy:

$$\underline{I}_L + \underline{I}_C = 0$$

co oznacza, że prądy w cewce i kondensatorze równoważą się.



**Rys. 2.9.** Wykres wskazowy równoległego obwodu R, L, C w stanie rezonansu prądów

Ponieważ w stanie rezonansu

$$I_L = I_C$$

oraz

$$I_L = \frac{U}{X_L}, \quad I_C = \frac{U}{X_C}$$

wobec

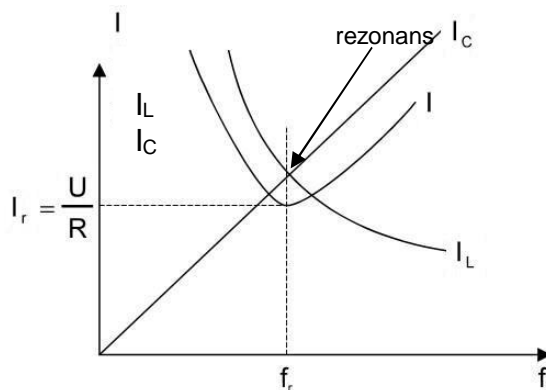
$$X_L = X_C \text{ lub } \omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (2.14)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wyrażenia, które muszą być spełnione, aby obwód z rys. 2.8 znalazł się w stanie rezonansu. Równanie (2.14) może być spełnione przez odpowiedni dobór indukcyjności L i pojemności C przy stałej częstotliwości f źródła napięcia zasilającego lub przez zmiany częstotliwości f źródła, gdy stałe są wartości L i C.

Z zależności (2.14) otrzymujemy wyrażenie na częstotliwość rezonansową:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (2.15)$$

Częstotliwość rezonansowa w przypadku rezonansu prądów opisana jest za pomocą identycznej zależności jak częstotliwość przy rezonansie szeregowym.



**Rys. 2.10.** Charakterystyki częstotliwościowe

Właściwości równoległego obwodu rezonansowego dobrze ilustrują zależności prądów I, I\_L, I\_C od częstotliwości f.



$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \quad ..(2.16)$$

$$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{\omega L} \quad (2.17)$$

$$I_C = \frac{U}{X_C} = U\omega C \quad (2.18)$$

Na rysunku 2.10 przedstawiono charakterystyki czysto biernego prądu  $I$ ,  $I_L$  i  $I_C$ . W stanie rezonansu prąd  $I$  ma wartość minimalną ograniczoną przez rezystancję  $R$ , natomiast prądy  $I_L$  i  $I_C$  równoważą się. Dobro obwodu równoległego zmienna jest zasadniczo ze stratami mocy w kondensatorze i zależy od stosunku rezystancji  $R$  do reaktancji  $X_C$ .

Dobro  $Q = \frac{R}{X_C}$ , w stanie rezonansu:

$$Q_r = \frac{R}{X_{C_r}} = \frac{R}{X_{L_r}} \quad (2.19)$$

oraz

$$I_{L_r} = I_{C_r} = \frac{U}{X_{L_r}} = \frac{U}{R} Q_r = I_r Q_r \quad (2.20)$$

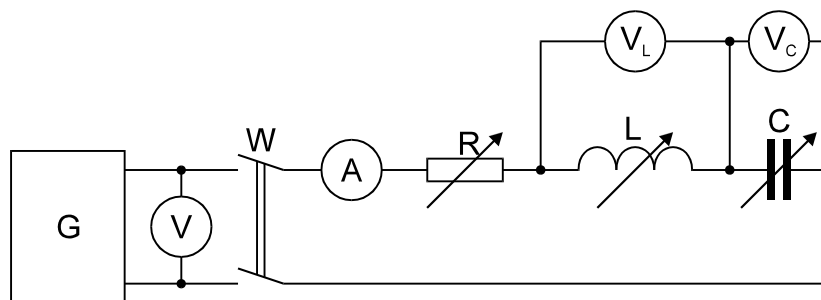
Oznacza to, że przy rezonansie prądy  $I_L$  i  $I_C$  są  $Q_r$  razy większe od prądu pobieranego przez obwód co nosi nazwę **przetnienia**.

## 2.2. Badania laboratoryjne

### 2.2.1. Rezonans napięci

#### 2.2.1.1. Badanie w obwodzie pojemności na rezonans napięci

Układ pomiarowy przedstawiono na rys.2.11.



Rys. 2.11. Schemat układu pomiarowego

Oznaczenia:

- G - generator, A - amperomierz,  $V_L$ ,  $V_C$ , V - woltomierze,
- R - rezystor dekadowy, L - indukcyjność dekadowa,
- C - pojemność dekadowa

Pomiary dla różnych wartości pojemności wykonujemy w układzie, którego schemat został podany na rys. 2.11. Wyniki pomiarów i obliczenia należy zamieścić w tabeli 2.1.

**Tabela 2.1.**
 $U=1 \dots, f=1 \dots, L=1 \dots, R=1 \dots$ 

Lp.	Pomiar				Obliczenia	
	C	I	$U_L$	$U_C$	$X_C$	$X_L$
	$\mu F$	mA	V	V	$\Omega$	$\Omega$
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						

Przykład oblicze :

$$X_L =$$

$$X_C =$$

Na podstawie otrzymanych wyników pomiarów i oblicze sporz dzi wykresy  $I$ ,  $U_L$ ,  $U_C$  w funkcji  $X_C$ . Narysowa wykresy wskazowe dla obwodu w stanie rezonansu oraz dla obydwu kra cowych przypadków odstrojenia od rezonansu.

### 2.2.1.2. Charakterystyki cz stotliwo ciowe

Pomiary dla ró nych warto ci cz stotliwo ci wykonujemy w uk adzie, którego schemat zosta opodany na rys. 2.11. Wyniki pomiarów i oblicze nale y zamie ci w tabeli 2.2.

**Tabela 2.2.**

$U = \dots$ ,  $f = \dots$ ,  $L = \dots$ ,  $R = \dots$

Lp.	Pomiar				Obliczenie		
	f	I	U <sub>L</sub>	U <sub>C</sub>	X <sub>L</sub>	X <sub>C</sub>	$\frac{I}{I_r}$
	Hz	mA	V	V	Ω	Ω	-
1.							
2.							
3.							
4.							
5.							
6.							
7.							

Przykład oblicze :

$$X_L = X_C =$$

$$2\Delta f = Q_r =$$

Na podstawie otrzymanych wyników pomiarów i oblicze przedstawi na jednym wykresie charakterystyki rezonansowe I, U<sub>L</sub>, U<sub>C</sub>.

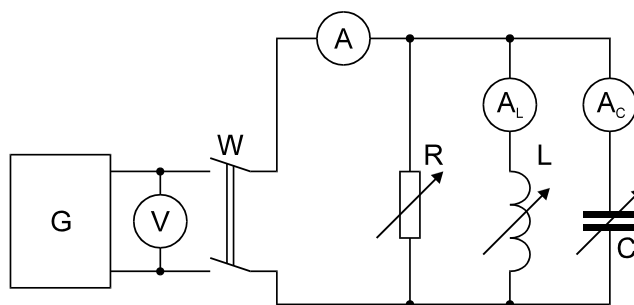
Narysowa na wspólnym wykresie krzywe rezonansowe obwodu: I=F(f).

Okre li szeroko pasma przepuszczania 2Δf i dobro obwodu w stanie rezonansu.

## 2.2.2. Rezonans prądów

### 2.2.2.1. Badanie wpływu pojemności na rezonans prądów

Układ pomiarowy przedstawiono na rys.2.12.



Rys. 2.12. Schemat układu pomiarowego

Oznaczenia:

G - generator, A, A<sub>L</sub>, A<sub>C</sub> - amperomierze, V - woltomierz,

R - rezystor dekadowy, L - indukcyjność dekadowa,

C - pojemność dekadowa

Pomiary dla różnych wartości pojemności wykonujemy w układzie, którego schemat został podany na rys. 2.12. Wyniki pomiarów i obliczenia zamieść w tabeli 2.3.

**Tabela 2.3.**

$U=1 \dots, f=1 \dots, L=1 \dots, R=1 \dots$

Lp.	Pomiar				Obliczenia	
	C	I	I <sub>C</sub>	I <sub>L</sub>	X <sub>C</sub>	X <sub>L</sub>
	μF	mA	mA	mA	Ω	Ω
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						

Przykład oblicze :

$$X_L =$$

$$X_C =$$

Na podstawie otrzymanych wyników pomiarów i oblicze sporz dzi wykresy I, I<sub>L</sub>, I<sub>C</sub> w funkcji X<sub>C</sub>. Narysowa wykresy wskazowe dla obwodu w stanie rezonansu oraz dla obydwu kra cowych przypadków odstrojenia od rezonansu.

#### 2.2.2.2. Charakterystyki cz stotliwo ciowe

Pomiary dla ró nych warto ci cz stotliwo ci wykonujemy w uk adzie, którego schemat zosta opodany na rys. 2.12. Wyniki pomiarów i oblicze nale y zamie ci w tabeli 2.4.

**Tabela 2.4.**

U=í ..., L=í ..., C=í ..., R=í ...

Lp.	Pomiar				Obliczenia	
	f	I	I <sub>C</sub>	I <sub>L</sub>	X <sub>C</sub>	X <sub>L</sub>
	Hz	mA	mA	mA	Ω	Ω
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						

Przykład oblicze :

$X_L =$

$X_C =$

Na podstawie otrzymanych wyników i oblicze przedstawi na wykresie charakterystyki cz stotliwo ciowe I, I<sub>C</sub>, I<sub>L</sub> obwodu.

### 2.3. Uwagi i wnioski

Porówna przebiegi charakterystyk otrzymane w wiczeniu z przebiegami znanymi z teorii.

#### Literatura

- [1] Krakowski M. Elektrotechnika Teoretyczna. Obwody liniowe i nieliniowe. t.I, WNT, 1995
- [2] Praca zbiorowa: Elektrotechnika i elektronika dla nieelektryków, WNT, Warszawa ,1999.