

Zespół Szkół Technicznych im. J. i J. Śniadeckich w Grudziądzu



Elektrotechnika i Elektronika

Materiały Dydaktyczne

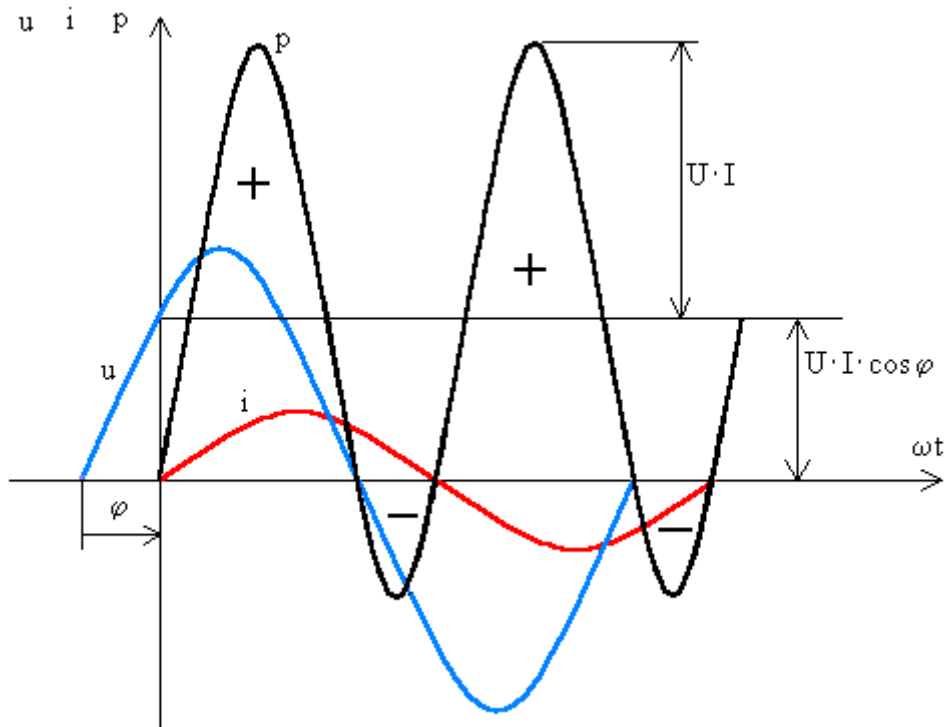
Moc w obwodach prądu zmiennego.

Opracował:

mgr inż. Marcin Jabłoński

Moc czynna, bierna i pozorna

Na wykresach poniższych przedstawiona jest moc chwilowa. Widać, że moc chwilowa jest sinusoidą o pulsacji dwukrotnie większej od pulsacji napięcia i prądu. Przebieg mocy chwilowej jest przesunięty o stałą wartość $U \cdot I \cdot \cos \varphi$ do góry (jest to składowa stała) i posiada amplitudę równą $U \cdot I$.



1. Moc czynna

Mocą czynną nazywamy średnią wartość mocy chwilowej.

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad (1)$$

Jednostką mocy czynnej jest wat

$$[P] = 1W$$

Moc czynna zależy od wartości skutecznej napięcia i prądu oraz od cosinusa przesunięcia fazowego między nimi (współczynnika mocy).

Moc czynna zamienia się w odbiornikach energii elektrycznej w inny rodzaj mocy np. mechaniczną, ciepłą.

Moc czynna wydziela się w obwodach prądu zmiennego na idealnych opornikach. Jeśli uwzględnimy to, że na idealnym oporniku napięcie i prąd są w fazie ($\varphi = 0$) to moc czynną na idealnym oporniku możemy liczyć ze wzorów:

$$P = U \cdot I, \quad \text{gdyż } \cos 0^\circ = 1 \quad (2)$$

$$P = I^2 \cdot R, \quad \text{ponieważ } U = R \cdot I \quad (3)$$

$$P = \frac{U^2}{R} = U^2 \cdot G \quad (4)$$

2. Moc bierna

Moc bierna jest iloczynem wartości skutecznej napięcia, prądu i sinusa przesunięcia fazowego między napięciem i prądem.

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi \quad (5)$$

Jednostką mocy biernej jest var.

$$[Q] = 1 \text{ var}$$

Moc bierna nie może zamienić się w odbiornikach w inny rodzaj mocy. Moc ta pulsuje między źródłem a odbiornikiem. Pobór mocy biernej przez odbiorniki jest ograniczany (poprawa $\cos \varphi$).

Moc bierną w obwodach prądu zmiennego pobierają tylko idealne cewki oraz idealne kondensatory.

Jeśli uwzględnimy, że na idealnej cewce $\varphi = 90^\circ$ a na idealnym kondensatorze $\varphi = -90^\circ$ możemy napisać następujące wzory na moc bierną.

$$Q_L = U \cdot I \quad (6)$$

$$Q_L = I^2 \cdot X_L \quad (7)$$

$$Q_C = -U \cdot I \quad (8)$$

$$Q_C = -I^2 \cdot X_C \quad (9)$$

Q_L - moc bierna na cewce

Q_C - moc bierna na kondensatorze

Moc bierna na kondensatorze jest ujemna, ponieważ:

$$\sin(-90^\circ) = -1$$

3. Moc pozorna

Moc pozorna jest iloczynem wartości skutecznej napięcia i prądu.

$$S = U \cdot I \quad (10)$$

Jednostką mocy pozornej jest woltamper.

$$[S] = 1 \text{ VA}$$

Aby znaleźć związek między mocą czynną, bierną i pozorną obliczmy:

$$P^2 + Q^2 = (U \cdot I \cdot \cos \varphi)^2 + (U \cdot I \cdot \sin \varphi)^2 = (U \cdot I)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$$

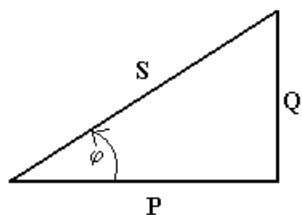
Biorąc pod uwagę to, że $S = U \cdot I$, oraz $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ mamy

$$P^2 + Q^2 = S^2 \quad (11)$$

Moc czynna, bierna i pozorna tworzą trójkąt prostokątny mocy.

Z trójkąta mocy wynikają następujące związki.

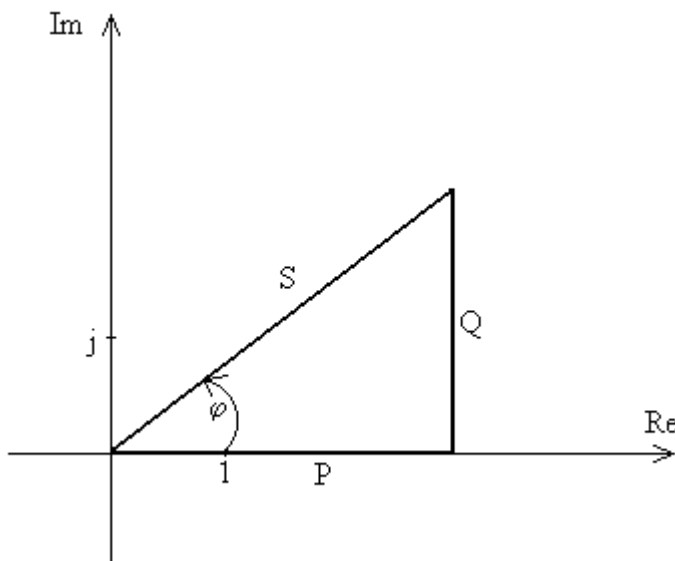
$$P^2 + Q^2 = S^2$$



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{Q}{P} \\ P &= S \cdot \cos \varphi \\ Q &= S \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

4. Moc pozorna zespolona

Narysujmy trójkąt mocy na płaszczyźnie zespolonej.



Z rysunku widać, że moc pozorną możemy potraktować jako liczbę zespoloną i przedstawić ją w postaci:

$$\underline{S} = P + jQ = S e^{j\varphi}$$

Tak przedstawioną moc nazywamy mocą pozorną zespoloną.

Jej część rzeczywista (P) to moc czynna, część urojona (Q) to moc bierna, moduł (S) to moc pozorna a argument (φ) to przesunięcie fazowe między napięciem a prądem.

Obliczmy teraz moc pozorną zespoloną.

$$\underline{S} = P + jQ = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = UI(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$\underline{S} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = U e^{j\varphi_u} \cdot I e^{-j\varphi_i}$$

Jeśli uwzględnimy, że:

$$U e^{j\varphi_u} = \underline{U}$$

$$I e^{-j\varphi_i} = \underline{I}^*$$

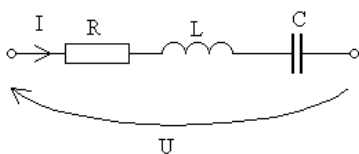
Wzór na moc pozorną zespoloną przyjmuje postać:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* \quad (12)$$

Moc pozorna zespolona jest iloczynem wartości zespolonej napięcia oraz wartości zespolonej sprzężonej prądu.

Zadanie

Oblicz moc czynną, bierną i pozorną pobieraną przez następujący dwójnik.



$$\begin{aligned} U &= 230\text{V} \\ R &= 30\Omega \\ X_L &= 60\Omega \\ X_C &= 100\Omega \end{aligned}$$

Rozwiązanie 1.

Obliczymy wartość skuteczną prądu płynącego przez dwójnik oraz przesunięcie fazowe między napięciem a prądem. Następnie policzymy poszczególne moce.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (60 - 100)^2} = 50\Omega$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{60 - 100}{30} = -1,33$$

$$\varphi = -53,13^\circ$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{230}{50} = 4,6\text{A}$$

$$P = UI \cos \varphi = 230 \cdot 4,6 \cdot \cos(-53,13^\circ) = 634,8\text{W}$$

$$Q = UI \sin \varphi = 230 \cdot 4,6 \cdot \sin(-53,13^\circ) = -846,4 \text{ var}$$

$$S = UI = 230 \cdot 4,6 = 1058\text{VA}$$

Rozwiązanie 2.

Obliczymy moc pozorną zespoloną.

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = 30 + j(60 - 100) = (30 - j40)\Omega$$

$$\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}} = \frac{230}{30 - j40} = (2,76 + j3,68)\text{A}$$

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 230 \cdot (2,76 - j3,68) = 634,8 + j846,4 = 1058e^{-j53,13^\circ} \text{ VA}$$

$$P = 634,8\text{W}$$

$$Q = -846,4 \text{ var}$$

$$S = 1058\text{VA}$$

Rozwiązanie 3.

Obliczymy moc pobieraną przez każdy element obwodu.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (60 - 100)^2} = 50\Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{230}{50} = 4,6\text{A}$$

$$P = I^2 \cdot R = 4,6^2 \cdot 30 = 634,8\text{W}$$

$$Q_L = I^2 \cdot X_L = 4,6^2 \cdot 60 = 1269,6 \text{ var}$$

$$Q_C = -I^2 \cdot X_C = -4,6^2 \cdot 100 = -2116 \text{ var}$$

$$Q = Q_L + Q_C = 1269,6 - 2116 = -846,4 \text{ var}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{634,8^2 + (-846,4)^2} = 1058\text{VA}$$