

REZONANS SZEREGOWY I RÓWNOLEGLY

I. Rezonans napięć

Zjawisko rezonansu napięć występuje w gałęzi szeregowej RLC i polega na tym, że przy określonej częstotliwości sygnałów w obwodzie f_0 , zwanej częstotliwością rezonansową, napięcie $U_L(t)$ na cewce oraz $U_C(t)$ na kondensatorze są równe co do modułu, a przeciwne co do znaku, wobec czego ich suma jest równa zero. Jeśli szeregowy obwód RLC (rys. 1) zasilany jest ze źródła napięciowego sinusoidalnego

$$u(t) = |U_m| \sin(\omega t + \varphi)$$

(1)

to prąd płynący w obwodzie ma charakter sinusoidalny

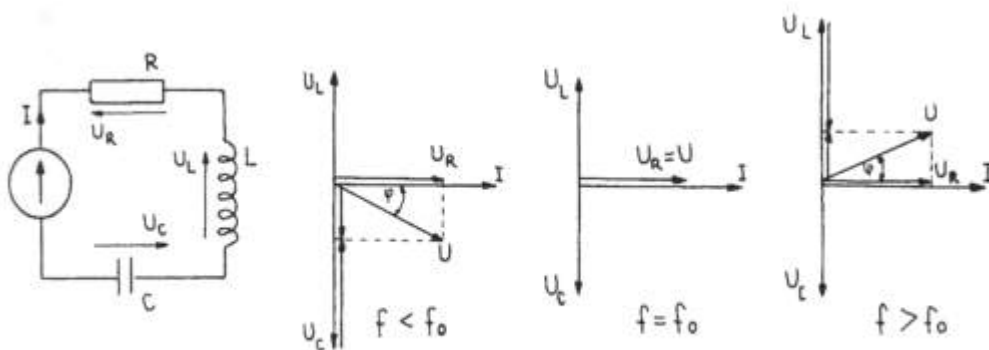
$$i(t) = |I_m| \sin \omega t$$

(2)

Prąd zespolony wyraża się stosunkiem napięcia zespolonego do impedancji obwodu

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

(3)



Rys.1. Szeregowy obwód RLC i wykresy wskazowe dla tego obwodu

W zależności od częstotliwości źródła przeważa w obwodzie reaktancja indukcyjna $X_L = \omega L$

lub reaktancja pojemnościowa $X_C = \frac{1}{\omega C}$ lub obie te reaktancje są sobie równe $X_L = X_C$

(rys. 2). Właśnie ten przypadek $X_L = X_C$

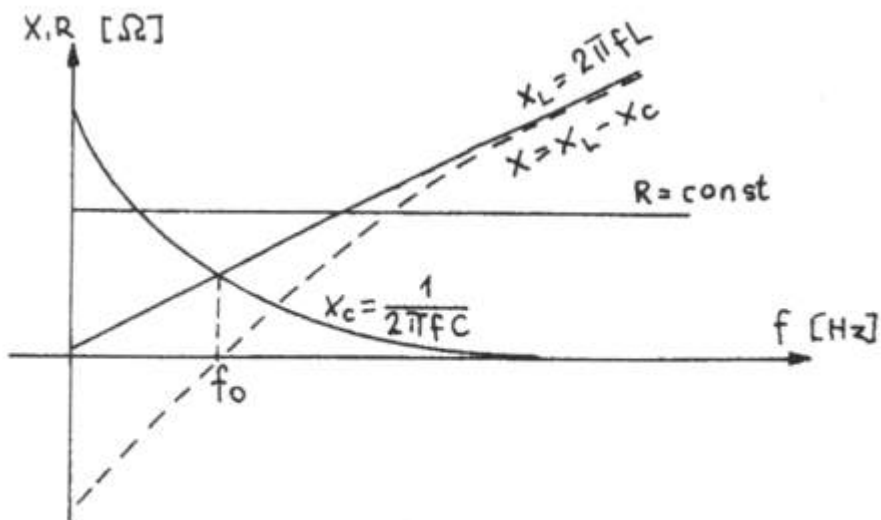
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

(4)

natomiast

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(5)



Rys.2. Charakterystyka częstotliwościowa rezystancji i reaktancji gałęzi szeregowej RLC

Impedancja obwodu rezonansowego wynosi:

$$Z = R + j(X_L - X_C) = R$$

(6)

czyli w stanie rezonansu dwójnik szeregowy składający się z elementów RLC ma charakter

rezystancyjny (współczynnik mocy $\cos \varphi = \frac{R}{|Z|} = 1$). Wartość skuteczna prądu płynącego

w obwodzie zależy jedynie od rezystancji i osiąga maksimum $|I(\omega_0)| = |I_0| = |I|_{\max} = \frac{U}{R}$.

Napięcie na cewce wynosi:

$$U_L = jX_L I = j2\pi f_0 L I$$

(7)

a na kondensatorze

$$U_C = -j X_C I = \frac{-j}{2\pi f_o C} I$$

(8)

Z równości reaktancji indukcyjnej i pojemnościowej wynika dla obwodu szeregowego RLC równość modułów napięć na cewce i kondensatorze

$$\langle p \rangle = 0$$

Wartości chwilowe napięć na kondensatorze i na cewce są przesunięte w fazie o kąt 180° .

W stanie rezonansu całkowicie się kompensują, czyli napięcie zasilające $U = RI$ (patrz rys. 1).

Wartości chwilowe energii $w_C(t)$ nagromadzonej w polu elektrycznym kondensatora oraz $w_L(t)$ nagromadzonej w polu magnetycznym cewki dla częstotliwości (pulsacji) rezonansowej wynoszą:

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} L |I_m|^2 \sin^2 \omega_o t$$

(9)

$$w_C = \frac{1}{2} C u_C^2(t) = \frac{1}{2} C |U_{cm}|^2 \cos^2 \omega_o t$$

(10)

Energia nagromadzona w układzie jest wielkością stałą i wynosi:

$$w_{LC}(t) = w_L(t) + w_C(t) = \frac{1}{2} L |I_m|^2 = \frac{1}{2} C |U_{cm}|^2$$

(11)

W stanie rezonansu występuje odwracalny proces zamiany co ćwierć okresu energii pola magnetycznego cewki w energię pola elektrycznego kondensatora i odwrotnie. Stąd częstotliwość drgań energii w każdym z elementów jest dwa razy większa od częstotliwości

f_o napięcia źródłowego. W ciągu jednego okresu $T_o = \frac{1}{f_o}$ opornik pobiera ze źródła energię

$w_R = P T_o = R |I|^2 T_o$. W procesie nie bierze udziału ani cewka ani kondensator.

W obwodach rezonansowych wykorzystuje się pojęcie dobroci. Dobroć cewki

$$Q_L = \frac{2\pi f_0 L}{R}$$

w stanie rezonansu jest równa dobroci kondensatora

$$Q_C = \frac{1}{R 2\pi f_0 C}$$

wynosi $Q = \frac{|U_L|}{|U|} = \frac{|U_C|}{|U|}$. Zależność prądu zespolonego od częstotliwości przedstawia się następująco:

$$|I|(\omega) = \frac{|U|}{|Z|} = \frac{|U|}{\sqrt{R^2 + \left(aL - \frac{1}{aC}\right)^2}}$$

(12)

a dla częstotliwości rezonansowej

$$|I|(\omega_0) = |I_0| = \frac{|U|}{|Z|} = \frac{|U|}{\sqrt{R^2 + \left(aL - \frac{1}{aC}\right)^2}} = \frac{|U|}{|R|}$$

(13)

Stosunek tych dwóch prądów wynosi

$$\begin{aligned} \frac{|I|}{|I_0|} &= \frac{R}{|Z|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(aL - \frac{1}{aC}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{aL}{R} - \frac{1}{aCR}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{aL\omega_0}{R\omega_0} - \frac{\omega_0}{CR\omega_0}\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(Q_L \frac{\omega}{\omega_0} - Q_C \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}} Q^2 \end{aligned}$$

(14)

gdzie:

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ - pulsacja względna}$$

$$Q = Q_L = Q_C$$

Szerokość pasma określa przedział pulsacji (częstotliwości), w którym wartość zespolonego

prądu względnego $\frac{|I|}{|I_0|}$ nie zmniejsza się poniżej wartości $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$.

Stąd

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

(15)

gdzie:

ω_1 , ω_2 - pulsacje, dla których

$$\frac{|I|}{|I_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(16)

Zależność zespolonego napięcia względnego na cewce od częstotliwości

$$\frac{|U_L|}{|U|} = \frac{aL}{\sqrt{R^2 + \left(aL - \frac{1}{aC}\right)^2}} = \frac{\frac{aL\omega_0}{R\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{aL\omega_0}{R\omega_0} - \frac{\omega_0}{CR\omega_0}\right)^2}} = \frac{\eta Q}{\sqrt{1 + \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2} Q^2}$$

(17)

i analogicznie

$$\frac{|U_C|}{|U|} = \frac{Q}{\eta \sqrt{1 + \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2} Q^2}$$

(18)

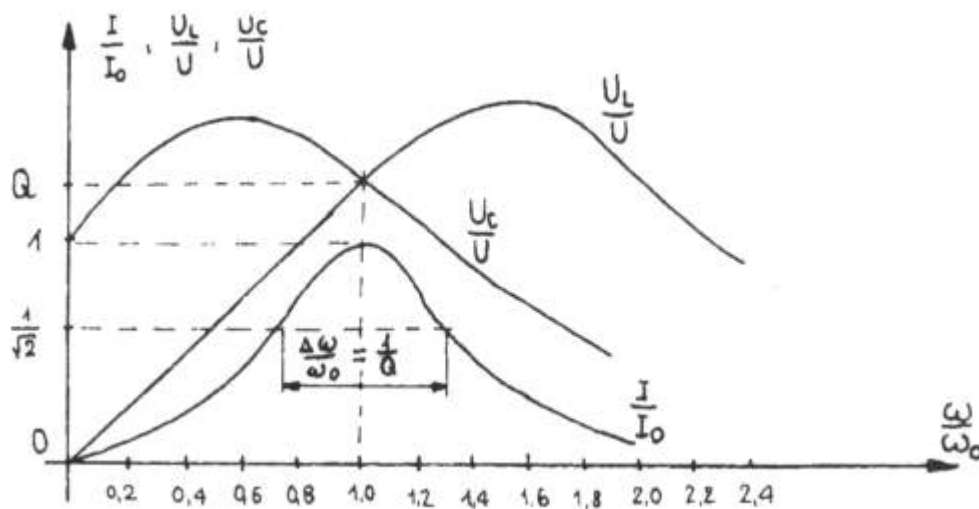
$$\frac{|U_{LC}|}{|U|} = \frac{Q}{\sqrt{1 + \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2} Q^2} \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)$$

(19)

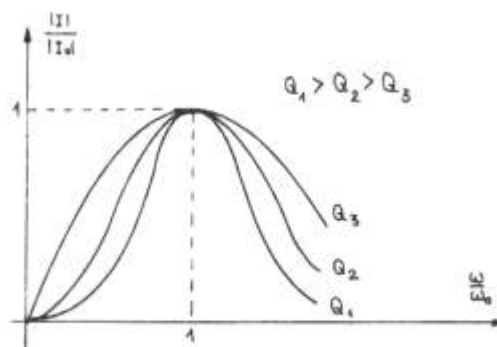
Dla $\eta = 1$ $\frac{|U_L|}{|U|} = Q$ $\frac{|U_C|}{|U|} = Q$,

co jest zgodne z definicją dobroci.

Z charakterystyk częstotliwościowych zespolonego prądu względnego $\frac{|I|}{|I_0|}$ można odczytać, że gdy zwiększa się dobroć, pasmo przepuszczania maleje, charakterystyka $\frac{|I|}{|I_0|}$ jest coraz bardziej stroma (rys. 4), czyli selektywność jest większa.



Rys.3. Graficzne wyznaczanie dobroci obwodu



Rys.4. Charakterystyki częstotliwościowe prądu w obwodzie szeregowym RLC przy $U = \text{const}$, $C = \text{const}$, $L = \text{const}$, $Q = \text{var}$

Od wartości dobroci w sposób wprost proporcjonalny zależą wartości napięć występujących na cewce i kondensatorze. Napięcia te przy dużej dobroci obwodu są większe od napięcia zasilania

$$|U_C|_{\max} = |U_L|_{\max} = \frac{Q|U|}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}$$

(20)

Są to tzw. przepięcia.

W obwodach bardziej złożonych niż gałęź szeregową RLC warunkiem rezonansu napięć jest znikanie reaktancji gałęzi

$$Z_{\text{gałęzi}} = R_{\text{gałęzi}} + jX_{\text{gałęzi}} = R$$

(21)

Z warunku $X_{\text{gałęzi}}=0$ można wyznaczyć częstotliwość rezonansową. Z analizy wykresu wektorowego wykonanego dla obwodu wynika które napięcia się kompensują (są w rezonansie).

Występujące w układach elektroenergetycznych nieprzewidziane zjawisko rezonansu napięć stanowi poważne niebezpieczeństwo przebiecia izolacji układów. Szeregowe obwody rezonansowe wykorzystane są natomiast jako filtry selektywne, wydzielające wśród sygnałów elektrycznych o różnych częstotliwościach sygnały o częstotliwościach pożądanym.

II. Rezonans prądów

Zjawisko rezonansu prądów występuje w gałęzi równoległej GCL i polega na tym, że przy określonej częstotliwości f_0 , zwanej częstotliwością rezonansową, prąd $i_C(t)$ płynący przez kondensator oraz $i_L(t)$ płynący przez cewkę mają równe amplitudy, lecz przeciwne fazy, wobec czego ich suma jest równa zero.

Jeśli równoległy obwód GLC zasilany jest ze źródła prądu sinusoidalnego $i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$, to odpowiedzią jest napięcie sinusoidalne $u(t) = U_m \sin \omega t$, któremu odpowiada wartość zespolona

$$U = \frac{I}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

(22)

W zależności od częstotliwości źródła przeważa w obwodzie susceptancja indukcyjna

$B_L = \frac{1}{\omega L}$ lub susceptancja pojemnościowa $B_C = \omega C$ albo, jak w rezonansie, obie te susceptancje są sobie równe $B_L = B_C$ (rys. 6). Dla częstotliwości

$$f = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

(24)

admitancja obwodu wynosi

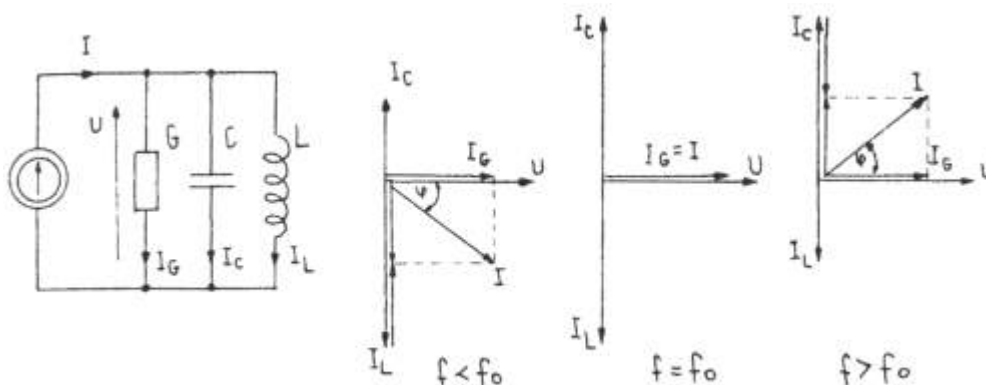
$$\underline{Y} = G + jB = G + j(B_L - B_C) = G$$

(25)

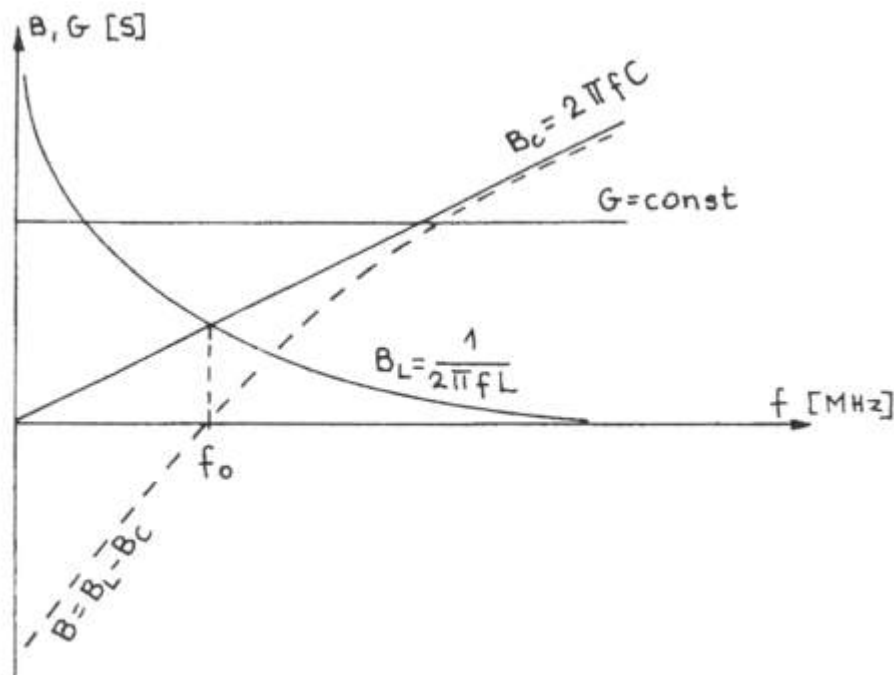
czyli obwód ma charakter rezystancyjny (współczynnik mocy $\cos \varphi = 1$), a więc prąd I jest w fazie z napięciem U . Napięcie to osiąga wartość największą

$$|U|(f_0) = |U_{\max}| = |U_0| = \frac{|I|}{G}$$

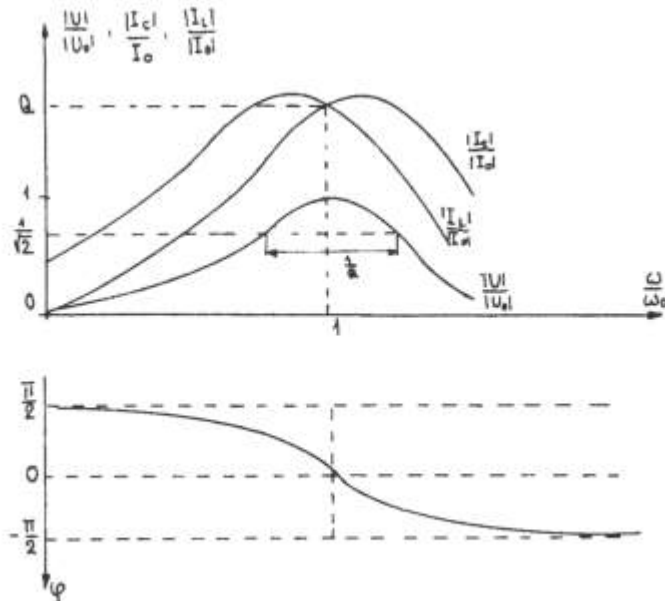
w porównaniu z wartościami skutecznymi napięć przy częstotliwościach poza rezonansowych.



Rys.5. Równoległy obwód GCL i wykresy wskazowe dla tego obwodu



Rys.6. Charakterystyki częstotliwościowe konduktancji i susceptancji gałęzi równoległej GCL



Rys.7. Charakterystyki częstotliwościowe prądów, napięcia i kąta przesunięcia fazowego dla układu równoległego GCL.

Wartości chwilowe energii $w_C(t)$ nagromadzonej w polu elektrycznym kondensatora oraz $w_L(t)$ nagromadzonej w polu magnetycznym cewki dla częstotliwości rezonansowej wynoszą:

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C u^2(t) = \frac{1}{2} C |U_m|^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} L |I_m|^2 \cos^2 \omega_0 t$$

Suma tych energii stanowiąca energię nagromadzoną w układzie jest w każdej chwili wartością stałą i wynosi

$$w_{LC}(t) = w_C(t) + w_L(t) = \frac{1}{2} C |U_m|^2 = \frac{1}{2} L |I_m|^2$$

Następuje tu proces odwracalny zamiany co ćwierć okresu energii zgromadzonej w polu elektrycznym kondensatora w energię pola magnetycznego cewki i odwrotnie, przy czym w tym procesie wymiany energii ani źródło, ani rezystancja nie biorą udziału. Źródło natomiast wydaje energię z mocą czynną $P = GU^2$, którą pobiera opornik w ciągu okresu

$$\frac{|U_c|}{|U|} = Q$$

. Opornik pobiera energię

$$W_G = PT = GU^2T$$

Dobroć układu równoległego GCL w stanie rezonansu prądów wynosi

$$Q = 2\pi f \frac{W_{LC}}{P} = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Ponieważ równoległy obwód rezonansowy GCL jest dualny z szeregowym obwodem RLC, to charakterystyki częstotliwościowe są dualne do poprzednich i przyjmują kształt jak na rys. 7. Dobroć układu równoległego można więc wyznaczyć graficznie w sposób analogiczny jak w przypadku obwodu szeregowego (patrz punkt 1.1). W układach złożonych częstotliwości, przy której występuje rezonans prądów, wylicza się z warunków znikania urojonej części admitancji gałęzi $B_{\text{gałęzi}}=0$.

$$Y_{\text{gałęzi}} = G_{\text{gałęzi}} + jB_{\text{gałęzi}} = G_{\text{gałęzi}}$$

Rezonans prądów podobnie jak rezonans napięć może przedstawiać pewne niebezpieczeństwo dla obwodu, gdyż wartości prądów I_C i I_L mogą być znaczne. Zjawisko rezonansu prądów wykorzystuje się w elektroenergetyce do pełnej kompensacji mocy biernej odbiornika. W radiotechnice obwody rezonansowe LC wykorzystuje się jako filtry dla prądów o określonej częstotliwości oraz jako część składową wzmacniaczy rezonansowych.