

2. ANALIZA BŁĘDÓW I NIEPEWNOŚCI POMIARÓW

Z powodu niedokładności przyrządów i metod pomiarowych, niedoskonałości zmysłów, niekontrolowanej zmienności warunków otoczenia (wielkości wpływających) i innych przyczyn, wynik pomiaru jest zawsze różny od prawdziwej wartości wielkości mierzonej. Jest tylko jej mniej lub więcej dokładnym przybliżeniem. Wartość rzeczywista wielkości jest punktem na osi liczbowej, którego położenie można opisać za pomocą nieskończonego ciągu cyfr. Już sam fakt skończonego zapisu wyniku jest też źródłem jego niedokładności.

Zatem, podając wynik pomiaru określonej wielkości, należy koniecznie podać także pewną ilościową informację o jakości tego wyniku, a ściślej o jego dokładności (czyli o stopniu przybliżenia do wartości prawdziwej), tak aby korzystający z tego wyniku mógł ocenić jego wiarygodność. Bez takiej informacji wyniki pomiarów nie mogą być porównywane ani między sobą, ani z danymi z literatury lub norm.

Podstawowe pojęcia i parametry charakteryzujące dokładność wyniku pomiaru i metody ich obliczeń są treścią tego rozdziału.

2.1. Pojęcia podstawowe i klasyfikacja błędów

Podstawowym pojęciem jest **błąd pomiaru** definiowany jako różnica między wynikiem pomiaru x i wartością prawdziwą x_0 wielkości mierzonej

$$\Delta x = x - x_0. \quad (2.1)$$

Błądu pojedynczego pomiaru nie można obliczyć z zależności (2.1), ponieważ nie jest znana wartość prawdziwa wielkości mierzonej. Można go oszacować (estymować) lub obliczyć jego niektóre składowe, przy czym sposób postępowania zależy od rozpoznania rodzaju oddziaływań wielkości wpływających na wynik pomiaru. Można wyróżnić oddziaływania **przypadkowe** i oddziaływania **systematyczne**. Biorąc pod uwagę rodzaje oddziaływań, błędy pomiaru można podzielić na: **przypadkowe**, **systematyczne** oraz **grube** (pomyłki).

Błędy przypadkowe

Są to błędy spowodowane przypadkowym oddziaływaniem dużej liczby trudno uchwytanych czynników zakłócających (nazywanych *wielkościami wpływającymi*), których łączny wpływ zmienia się z pomiaru na pomiar. Charakterystyczną cechą błędów przypadkowych jest to, że ich wartości są różne w kolejnych pomiarach przeprowadzanych w jednakowy sposób (w warunkach powtarzalności).

Błąd przypadkowy jest *zmienną losową*, a w kolejnych pomiarach tej samej wielkości, wykonywanych w warunkach powtarzalności, otrzymuje się błędy o wartościach będących realizacjami tej zmiennej. Wyniki pomiarów są również realizacjami zmiennej losowej i ulegają rozproszeniu wokół wartości prawdziwej wielkości mierzonej. Stąd też szacowanie błędów przypadkowych jako miary rozproszenia wyników wokół wartości prawdziwej dokonuje się *metodami rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*.

Błąd przypadkowy wyniku pomiaru nie może być skompensowany przez poprawkę, ale może być zmniejszony przez wielokrotne powtarzanie pomiarów, a ściślej przez wykonanie serii n pomiarów i przyjęcie jako wyniku końcowego średniej arytmetycznej serii wyników x_i .

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i . \quad (2.2)$$

Wskutek oddziaływań przypadkowych średnia arytmetyczna (2.2) jest również zmienną losową, lecz jej rozrzut wokół wartości prawdziwej jest mniejszy. Zatem bardziej dokładnie przybliży ona wartość prawdziwą. Mówiąc inaczej stanowi bardziej dokładne, lepsze niż pojedynczy pomiar oszacowanie wartości prawdziwej. Zatem wartość średniej arytmetycznej serii pomiarów można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej i traktować jako poprawny wynik pomiaru.

Wyniki pomiarów przypisywane wielkości mierzonej, niezależnie od sposobu przypisania, wykazują rozrzuty wokół wartości prawdziwej, są więc niepewne. Pozwalają jedynie wyznaczyć przedział obejmujący nieznaną wartość prawdziwą. Ilościową miarą niedokładności pomiaru, której odzwierciedlenie stanowi rozrzut wyników jest **niepewność pomiaru**.

Pojęcie niepewności jako miara niedokładności zostało wprowadzone stosunkowo niedawno przez dokument „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement” wydany w 1993 roku przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną ISO (nazywany dalej “Guide”). Stał się on normą międzynarodową, obowiązującą także w Polsce, w której **niepewność pomiaru** jest definiowana jako *”parametr związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej”*. Parametrem takim może być na przykład odchylenie standardowe rozkładu wyników lub błędów pomiaru, albo połowa szerokości przedziału mającego ustalony poziom ufności, o czym dalej.

Istotne jest rozróżnienie między pojęciem błędu i pojęciem niepewności pomiaru. *Błąd jest zmienną losową, a niepewność jest parametrem rozkładu prawdopodobieństwa błędu.*

Pojęcie niepewności pomiaru najłatwiej było wyjaśnić na przykładzie pomiarów wykonywanych w warunkach oddziaływań przypadkowych, w powiązaniu z błędami przypadkowymi, lecz można je rozszerzyć również na pomiary w warunkach oddziaływań systematycznych i powiązać z błędami systematycznymi.

Błędy systematyczne

Powstają wskutek *systematycznych oddziaływań* wielkości wpływających. W kolejnych pomiarach wykonywanych w jednakowych warunkach błąd systematyczny ma wartość stałą. Przy zmianie warunków zmienia się z określoną prawidłowością, którą można wyznaczyć analitycznie.

Przykładem są błędy systematyczne spowodowane przesunięciem skali miernika analogowego, błędem wzorca (np. różną od nominalu masą odważnika), pomijaniem czynników wpływających na wyniki pomiaru (np. rezystancji przewodów przy pomiarze małych rezystancji), ustalonym wpływem warunków otoczenia (np. temperatury).

Jeżeli błąd systematyczny powstaje wskutek rozpoznanego oddziaływania systematycznego wielkości wpływających, to wpływ tego oddziaływania może być określony ilościowo i skompensowany addytywnie lub multiplikatywnie, przez dodanie do wyniku pomiaru **poprawki** lub pomnożenie wyniku przez **współczynnik poprawkowy**.

Wynik pomiaru przed korekcją błędu systematycznego nazywa się **wynikiem surowym**, a po korekcji **wynikiem poprawionym**.

Kompensacja błędu systematycznego nie może być zupełna, ponieważ błąd ten nie jest znany dokładnie. Wyznaczona poprawka jest obciążona niepewnością, która staje się jednym ze składników całkowitej niepewności pomiaru.

Błąd systematyczny spowodowany oddziaływaniem systematycznym nierozpoznanym ilościowo (np. niekontrolowanym wpływem temperatury) nie może być skorygowany. Często może być rozpoznany jakościowo i oszacowany w postaci przedziału wyznaczonego przez **błędy graniczne** Δx_0 . Do szacowania błędów systematycznych spowodowanych oddziaływaniem nierozpoznanym stosowane jest podejście statystyczne i na podstawie przedziału wyznaczonego przez błędy graniczne wyliczana jest niepewność standardowa typu B, definiowana dalej.

Błędy grube

Są to błędy spowodowane pomyłkami popełnianymi w trakcie wykonywania pomiaru lub odczytu i zapisywania wyniku. Przykładem mogą być błędy powstałe wskutek pomylenia skali w mierniku wielozakresowym, pomylenia jednostek lub przesunięcia przecinka przy zapisie wyniku, zwarcia lub rozwarcia niektórych elementów obwodu pomiarowego. Pomyłki można znacznie ograniczyć przez staranne wykonywanie pomiaru, a gdy powstają łatwo je zauważyć i wyeliminować, ponieważ otrzymany wynik znacznie różni się od innych wyników pomiaru tej samej wielkości.

2.2. Definicje dotyczące niepewności pomiaru

Jak już mówiliśmy, wynik pomiaru jest *liczbą przybliżoną* różną od wartości prawdziwej więc można go interpretować jako przedział na osi liczbowej, wewnątrz którego znajduje się wartość prawdziwa. Przedział ten, nazywamy **przedziałem niepewności** wyniku pomiaru (lub przedziałem ufności).

W celu ilościowego opisu tego przedziału dokument „Guide” definiuje cytowane już pojęcie **niepewność pomiaru** i szereg specyficznych miar ilościowych tego pojęcia.

Niepewność standardowa (u) – niepewność wyniku pomiaru wyrażona w formie odchylenia standardowego lub estymaty tego odchylenia.

Niepewność typu A (u_A) – obliczana metodą analizy statystycznej serii pojedynczych obserwacji (najczęściej wykorzystując normalny rozkład wyników).

Niepewność typu B (u_B) – obliczana innymi metodami niż w przypadku A (najczęściej wykorzystując rozkład prostokątny opisujący błędy systematyczne spowodowane nierozpoznanym oddziaływaniem systematycznym).

Złożona niepewność standardowa (u_c) – określana w przypadku występowania wielu składowych niepewności; dla pomiarów bezpośrednich jest pierwiastkiem sumy kwadratów niepewności składowych, dla pomiarów pośrednich sumowanie kwadratów niepewności składowych odbywa się z odpowiednimi wagami, zgodnie z prawem propagacji niepewności (omawianym dalej).

Niepewność rozszerzona (U) – jest iloczynem niepewności standardowej i współczynnika rozszerzenia k_α

$$U = k_\alpha u_c . \quad (2.3)$$

Określa ona granice przedziału niepewności, któremu można przypisać określony poziom ufności.

Poziom ufności (p_α) - jest prawdopodobieństwem tego, że w przedziale niepewności wyniku pomiaru (w przedziale ufności) znajduje się wartość prawdziwa, co można zapisać

$$p_\alpha = P\{x_0 \in (x - U, x + U)\} . \quad (2.4)$$

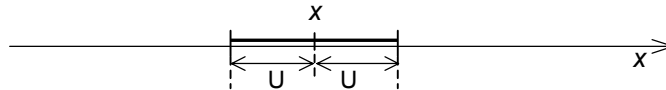
Prawdopodobieństwo to wyznacza się z rozkładu gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej modelującej wynik pomiaru $\underline{x}$ lub błąd pomiaru $\underline{\Delta x}$. Poziom ufności jest często wyrażany w procentach.

Wynik pomiaru zapisuje się w postaci:

$$x_0 = x \pm u_c \quad \text{na poziomie ufności odchylenia standardowego} \quad (2.5)$$

lub
$$x_0 = x \pm U \quad \text{na postulowanym poziomie ufności } p_\alpha. \quad (2.6)$$

Zapisy te przedziałowo określają wartość prawdziwą x_0 . Interpretację graficzną zapisu (2.6) ilustruje rys. 2.1



Rys. 2.1. W tym przedziale z prawdopodobieństwem p_α znajduje się wartość prawdziwa x_0

Niepewności pomiaru wg powyższych definicji wyraża się w jednostkach wielkości mierzonej. Ponieważ są one oceniane szacunkowo, należy opisywać je rozsądną liczbą cyfr znaczących (najczęściej ograniczoną do 2 cyfr). Na przykład byłoby absurdem podawanie wyniku pomiaru przyspieszenia ziemskiego w postaci:

$$g = 9,82 \pm 0,02385 \text{ m/s}^2.$$

Właściwe jest zaokrąglenie niepewności pomiaru do dwóch cyfr po przecinku i przedstawienie wyniku w postaci:

$$g = 9,82 \pm 0,02 \text{ m/s}^2.$$

Obok omawianych wyżej pojęć błędu i niepewności bezwzględnej wyrażanych w jednostkach wielkości mierzonej, definiuje się pojęcia błędu i niepewności *względnej* wyrażane bezwymiarowo, bardzo często w procentach lub ppm (part per million)

błąd względny
$$\delta_x = \frac{\Delta x}{x_0} \cong \frac{\Delta x}{x}, \quad (2.7)$$

niepewność względna
$$\delta_u = \frac{U_x}{x_0} \cong \frac{U_x}{x}. \quad (2.8)$$

Ponieważ wartość prawdziwa nie jest znana, w praktyce zastępuje się ją wartością *umownie prawdziwą (wartością poprawną)*, którą może być na przykład skorygowany wynik pomiaru (po korekcji błędu systematycznego) lub najlepsze oszacowanie wartości prawdziwej (najczęściej średnia arytmetyczna serii pomiarów $\bar{x}$), lub nawet wynik pojedynczego pomiaru.

W celu specyfikacji błędów instrumentalnych, zwłaszcza mierników analogowych, wykorzystuje się pojęcie klasy przyrządu, oznaczanej kl , definiowanej jako graniczny błąd względny obliczany względem wartości zakresowej przyrządu i wyrażany w procentach

$$kl = \frac{\Delta x_g}{x_{zakr}} \cdot 100\%, \quad (2.9)$$

gdzie: Δx_g – błąd graniczny przyrządu

x_{zakr} – wartość końcowa zakresu pomiarowego

Wartości liczbowe klasy przyrządu są wybierane z ciągu: $(1; 1,5; 2; 2,5; 5) \cdot 10^{-n}$, $n = 0, 1$.

Metody obliczania niepewności zalecane w „Guide” dotyczą wyników skorygowanych, tzn. po skompensowaniu składowej błędu systematycznego spowodowanej rozpoznaniem oddziaływaniem systematycznym, przez dodanie do surowego wyniku poprawki lub pomnożenie go przez współczynnik poprawkowy.

Zakłada się, iż skorygowany wynik pomiaru jest zmienną losową, której wartość oczekiwana jest równa wartości prawdziwej

$$E(\underline{x}) = x_0 \quad (2.10)$$

Założenie to jest równoznaczne z założeniem, że błąd pomiaru jest zmienną losową centrowaną

$$\underline{\Delta x} = \underline{x} - x_0 \quad (2.11)$$

o wartości oczekiwanej równej zeru

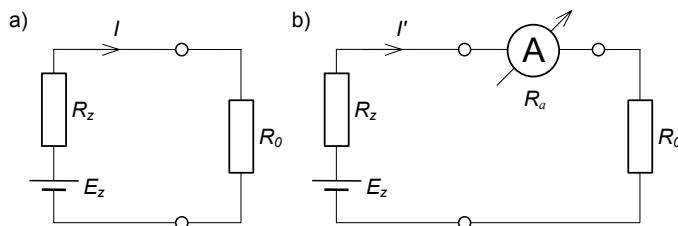
$$E(\underline{\Delta x}) = 0 \quad (2.12)$$

2.3. Obliczanie poprawki błędu systematycznego

Jak już mówiliśmy, składowa deterministyczna błędu systematycznego, spowodowana rozpoznaniem oddziaływaniem systematycznym, może być określona ilościowo i wykorzystana do addytywnego bądź moltiplikatywnego skorygowania surowego wyniku pomiaru.

Metody analizy i obliczeń błędów systematycznych są zróżnicowane. Brak jest ogólnych metod obliczeń tych błędów w pomiarach bezpośrednich. Metody takie istnieją w przypadku pomiarów pośrednich, w postaci tzw. praw propagacji błędów, które będą omawiane później. W pomiarach bezpośrednich każdy przypadek analizy błędu systematycznego wymaga indywidualnego podejścia, przy czym metody obliczeń są nader proste, oparte na wykorzystaniu wzorów opisujących różne prawa fizyki.

Typowy sposób postępowania pokażemy na przykładzie obliczeń błędu systematycznego popełnianego w przypadku pomiaru prądu amperomierzem o niezerowej rezystancji R_a , w obwodzie złożonym ze źródła napięcia E_z o rezystancji wewnętrznej R_z i obciążenia R_0 , pokazanym na rys. 2.2a. Włączenie amperomierza do obwodu wprowadza do niego dodatkową rezystancję R_a (rys. 2.2b), co powoduje, iż prąd w obwodzie pomiarowym I' jest mniejszy od prądu w obwodzie pierwotnym I



Rys. 2.2. Pomiar prądu w obwodzie elektrycznym złożonym ze źródła napięcia i obciążenia:
a) obwód pierwotny; b) obwód pomiarowy po włączeniu amperomierza

Systematyczny błąd bezwzględny można obliczyć ze wzoru:

$$\Delta I = I' - I, \quad (2.13)$$

biorąc pod uwagę, że:

$$I = \frac{E_z}{R_0 + R_z}, \quad \text{oraz} \quad I' = \frac{E_z}{R_0 + R_z + R_a}. \quad (2.14)$$

Z zależności (2.13) i (2.14) można wyprowadzić wzory na poprawkę

$$p_I = -\Delta I = \frac{E_z R_a}{(R_0 + R_z)(R_0 + R_z + R_a)} \quad (2.15)$$

i współczynnik poprawkowy

$$w_p = \frac{R_0 + R_z + R_a}{R_0 + R_z}. \quad (2.16)$$

W rozważanym przypadku łatwiej jest skompensować błąd systematyczny mnożąc pomiarowy surowy wynik pomiaru I' przez współczynnik poprawkowy obliczony ze wzoru (2.16).

Omawiany przykład można wykorzystać również do wysnucia wniosku natury ogólnej, odnośnie warunków minimalizacji zakłócającego wpływu przyrządu pomiarowego na badane zjawisko. Wykorzystując wzory (2.13) i (2.14) łatwo wyprowadzić wzór opisujący zależność systematycznego błędu względnego:

$$\delta_I = \frac{I' - I}{I'}, \quad (2.17)$$

od rezystancji amperomierza R_a .

Po wstawieniu (2.14) do (2.17) otrzymujemy

$$\delta_I = \frac{\frac{1}{R_0 + R_z + R_a} - \frac{1}{R_0 + R_z}}{\frac{1}{R_0 + R_z + R_a}} = -\frac{R_a}{R_0 + R_z}. \quad (2.18)$$

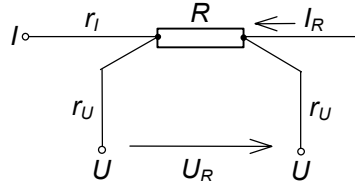
Zależność (2.18) wskazuje, iż w celu minimalizacji błędu wywołanego rezystancją amperomierza należy dążyć do zachowania warunku

$$R_a \ll R_0 + R_z, \quad (2.19)$$

który oznacza, iż rezystancja amperomierza powinna być dużo mniejsza od sumy pozostałych rezystancji w obwodzie. Fizyczna interpretacja warunku (2.18) prowadzi do wniosku, iż przy bardzo małej rezystancji wewnętrznej amperomierz pobiera mało energii z obwodu i tym samym mało zakłóca badane zjawisko. Wymóg małego poboru energii w celu minimalizacji zakłócającego wpływu przyrządu pomiarowego na obiekt badany ma charakter ogólny i dotyczy każdego przyrządu, m.in. woltomierza, który w trakcie pomiaru napięcia w obwodzie, pobiera mało energii przy bardzo dużej rezystancji wewnętrznej.

Inną drogą ograniczania błędów systematycznych jest stosowanie specjalistycznych metod lub układów pomiarowych. Istnieje wiele takich metod eliminujących lub minimalizujących deterministyczne składowe błędów systematycznych bez potrzeby

obliczania poprawek. Przykładem może być czterozaciskowa metoda pomiaru bardzo małych rezystancji (w zakresie $1\text{-}10^{-6}\Omega$), zilustrowana na rys. 2.3.



Rys. 2.3. Zasada 4-zaciskowego pomiaru bardzo małych rezystancji (styki Kelwina)

Pozwala ona eliminować błędy wnoszone przez rezystancje przewodów doprowadzających i styków, które mogą być współmierne lub nawet większe od rezystancji R . Zastosowanie 2 par zacisków: pary zacisków prądowych I - I służących do doprowadzenia i pomiaru prądu I_R oraz osobnej pary zacisków napięciowych służących do pomiaru napięcia metodą bezprądową lub z bardzo małym poborem prądu, daje możliwość pomiaru napięcia wprost na rezystancji R , a nie na jej zaciskach zewnętrznych i w konsekwencji pozwala wyeliminować wpływ rezystancji r_I i r_U na wynik pomiaru.

Należy jednak podkreślić, iż pozostają pewne nierozpoznawalne błędy resztkowe specjalistycznych metod pomiarowych. Zarówno błędy resztkowe jak też niepewności obliczonych poprawek są składnikami niepewności całkowitej obliczanej metodami A lub B, przedstawionymi w kolejnych punktach.

2.4. Probabilistyczne podstawy i przykłady analizy niepewności

W analizie niepewności pomiaru metodami *probabilistycznymi* (rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej) zakłada się, iż wyniki pomiarów są skorygowane i mogą być modelowane zmienną losową $\underline{x}$. Najlepszym opisem zmiennej losowej ciągłej jest rozkład gęstości prawdopodobieństwa $p(x)$. Ma ona tę właściwość, że jej całka w dowolnych granicach $x_1 < x_2$ określa prawdopodobieństwo znalezienia się zmiennej losowej w tych granicach:

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = P\{\underline{x} \in (x_1, x_2)\}. \quad (2.20)$$

Rozkład gęstości prawdopodobieństwa opisany jest parametrami rozkładu, z których najważniejszymi dla nas są:

wartość oczekiwana $\mu = E(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx,$ (2.21)

charakteryzująca środek zgrupowania wyników pomiarów oraz

odchylenie standardowe $\sigma_x = \sqrt{E\{(\underline{x} - \mu)^2\}},$ (2.22)

charakteryzujące rozproszenie wyników wokół środka zgrupowania. Operuje się też wariancją σ^2 .

Zamiast zmiennej losowej $\underline{x}$ często wygodniej jest posługiwać się *zmienną losową*

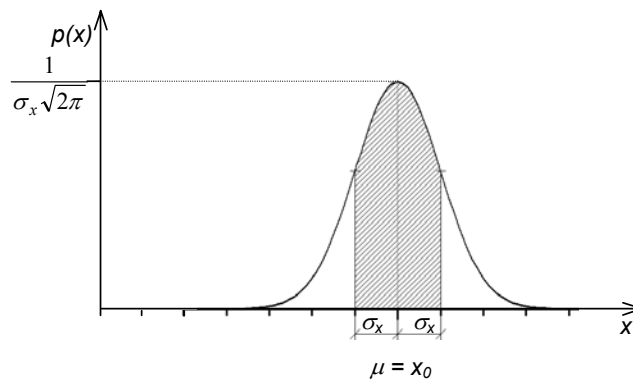
centrowaną
$$\underline{\Delta x} = \underline{x} - E(\underline{x}) = \underline{x} - \mu, \quad (2.23)$$

która modeluje błąd pomiaru i której wartość oczekiwana jest równa zero.

Dla większości sytuacji spotykanych w praktyce wyniki pomiarów mogą być modelowane zmienną losową o **rozkładzie normalnym**, nazywanym też **rozkładem Gaussa**

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma_x}\right)^2\right\}. \quad (2.24)$$

Na rys.2.4 pokazany jest wykres funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego.



Rys. 2.4. Wykres funkcji rozkładu normalnego zmiennej losowej x modelującej wynik pomiaru

Rozkład normalny jest rozkładem dwuparametrowym, opisanym parametrami μ i σ_x . Bywa często oznaczany skrótowo przez $N(\mu, \sigma_x)$. Wykres funkcji rozkładu jest krzywą o kształcie dzwonowym, symetrycznie wyśrodkowaną wokół wartości oczekiwanej μ (zakłada się, że jest ona równa wartości prawdziwej x_0). Odchylenie standardowe σ_x odpowiada odległości punktu przegięcia krzywej od odciętej środka zgrupowania. Zacienione pole pod częścią krzywej rozpiętą na przedziale $(\mu - \sigma_x, \mu + \sigma_x)$ jest równe

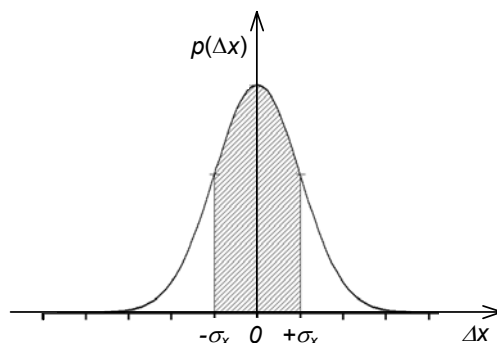
$$P(\mu - \sigma_x < \underline{x} < \mu + \sigma_x) = \int_{\mu - \sigma}^{\mu + \sigma} p(x) dx = 0,682. \quad (2.25)$$

Oznacza to, że prawdopodobieństwo (poziom ufności) tego, że wartość zmiennej losowej o rozkładzie normalnym znajduje się w wymienionym przedziale o promieniu σ_x jest równe 0,682 lub w procentach 68,2%. Przedziałom dwu i trzykrotnie szerszym, o promieniach $2\sigma_x$ i $3\sigma_x$, odpowiadają poziomy ufności odpowiednio 0,954 i 0,997.

Rozkład normalny zmiennej losowej centrowanej $\underline{\Delta x}$ modelującej błąd pomiaru ma postać

$$p(\Delta x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad (2.26)$$

a oznaczany jest $N(0, \sigma_x)$. Jego wykres jest pokazany na rysunku 2.5:



Rys. 2.5. Wykres rozkładu normalnego $N(0, \sigma_x)$ zmiennej centrowanej Δx modelującej błąd pomiaru

Warto zauważyć, iż kształt krzywej tego rozkładu jest identyczny z krzywą rozkładu $N(\mu, \sigma_x)$. Mówiąc inaczej zmienne losowe $\underline{x}$ i Δx modelujące wynik i błąd pomiaru mają takie same rozkłady wokół swoich wartości oczekiwanych, co ułatwia analizę.

Zamiast zależności (2.25) do obliczeń poziomu ufności $p_\alpha = P\{\underline{x} \in (\mu - \sigma, \mu + \sigma)\}$, można użyć prostszej zależności

$$p_\alpha = P(-\sigma_x < \Delta x < +\sigma_x) = \int_{-\sigma}^{+\sigma} p(\Delta x) d\Delta x = 0,682, \quad (2.27)$$

która wyraża prawdopodobieństwo tego, iż błąd pomiaru $\Delta x \in (-\sigma, \sigma)$.

W analizie błędów i niepewności rozszerzonej użyteczny jest też rozkład normalny zmiennej losowej *unormowanej* (*standaryzowanej*)

$$\underline{z} = \frac{\underline{x} - \mu}{\sigma_x}, \quad (2.28)$$

opisany wzorem

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (2.29)$$

o zerowej wartości oczekiwanej ($\mu = 0$) i odchyleniu standardowym równym 1 ($\sigma_z = 1$). Nosi on nazwę *unormowanego rozkładu normalnego* i jest oznaczany skrótowo $N(0,1)$. Jest wykorzystywany do obliczeń współczynnika rozszerzenia k_α przy postulowanym poziomie ufności niepewności rozszerzonej U .

Wyznaczanie niepewności rozszerzonej pojedynczego pomiaru

Różne postacie rozkładu normalnego i jego parametry mogą być wykorzystywane do obliczeń niepewności rozszerzonej U pojedynczego pomiaru, przy postulowanym poziomie ufności, w sytuacji gdy odchylenie standardowe zmiennej losowej modelującej pomiar σ_x jest znane a priori, a nieznana jest wartość oczekiwana ($\mu = x_0 = ?$). Tak jest w licznych przypadkach pomiarów wykonywanych wypróbowanym wielokrotnie przyrządem w rozpoznanych i stabilnych warunkach.

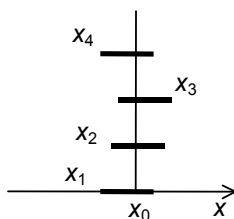
Wówczas wynik pojedynczego pomiaru x można zapisać:

$$x_0 = x \pm U = x \pm k_\alpha u, \quad \text{na poziomie ufności } p_\alpha \quad (2.30)$$

gdzie współczynnik rozszerzenia k_α jest adekwatny do postulowanego poziomu ufności

$$p_\alpha = P\{x_0 \in (x - U, x + U)\}. \quad (2.31)$$

Zapis (2.31) umiejscawia wartość prawdziwą w przedziale niepewności wokół wyniku pomiaru. Przedział ten ma stały promień, lecz jego położenie na osi liczbowej jest losowe, zmienia się z pomiaru na pomiar, co ilustruje rys. 2.6. Pokazano na nim położenia kilku przedziałów niepewności dla 4 różnych wyników pomiarów x_1, x_2, x_3, x_4 . Każdy z przedziałów ma inne położenie, jednak zawiera (przykrywa) wartość prawdziwą x_0 .



Rys. 2.6. Położenie przedziałów niepewności dla 4 różnych wyników pomiaru: x_1, x_2, x_3, x_4

Aby obliczyć współczynnik rozszerzenia k_α przy zadanym poziomie ufności p_α , lub odwrotnie poziom ufności dla zadanego współczynnika rozszerzenia, należy przekształcić wyrażenie (2.31) do równoważnej postaci

$$p_\alpha = P\{x \in (x_0 - U, x_0 + U)\}, \quad (2.32)$$

która umiejscawia wynik pomiaru w przedziale niepewności wokół wartości prawdziwej.

Przy przyjętych założeniach, iż wyniki pomiarów są modelowane zmienną losową o rozkładzie normalnym $x \in N(\mu, \sigma_x)$, przy czym $x_0 = \mu, u = \sigma_x$, zależność (2.32) przyjmuje postać

$$p_\alpha = P\{x \in (\mu - k_\alpha \sigma_x, \mu + k_\alpha \sigma_x)\} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{\mu - k_\alpha \sigma_x}^{\mu + k_\alpha \sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}} dx. \quad (2.33)$$

Stosując podstawienie

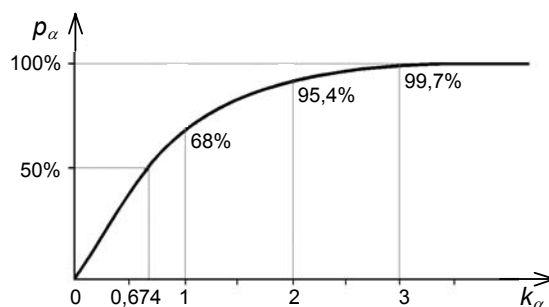
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma_x},$$

(2.33) można przekształcić do postaci

$$p_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k_\alpha}^{k_\alpha} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad (2.34)$$

która jest całką unormowanego rozkładu zmiennej losowej standaryzowanej $z \in N(0,1)$, opisanego wzorem (2.29). Wyrażenie (2.34) nazywane jest **funkcją błędu**.

Funkcja $p_\alpha = \varphi(k_\alpha)$ określa związki między k_α i p_α . Jest stabelaryzowana, a tablice są powszechnie dostępne. Na rys. 2.7 pokazano fragment wykresu tej funkcji oraz tablicę niektórych odpowiadających sobie wartości p_α i k_α .



k_α	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	3,5
$p_\alpha[\%]$	0	20	38	55	68,2	79	87	92	95,4	98,8	99,7	99,95

Rys. 2.7. Wykres funkcji $p_\alpha = \varphi(k_\alpha)$ oraz tablica wartości tej funkcji w wybranych punktach

Jak widać poziom ufności dla niepewności standardowej ($u = \sigma_x$) wynosi 68,2%, a dla dwusigmowej niepewności rozszerzonej $U = 2\sigma_x$ jest równy 95,4%. Dla wielu handlowych i przemysłowych zastosowań takie poziomy ufności są wystarczające. Jednak w pewnych zastosowaniach, zwłaszcza wtedy, gdy chodzi o zdrowie i bezpieczeństwo, wymaga się większych poziomów ufności. Wtedy zakłada się wymagany poziom ufności p_α i z tablicy funkcji $p_\alpha = \varphi(k_\alpha)$ wyznacza się odpowiedni współczynnik rozszerzenia.

Poziom ufności dla współczynnika rozszerzenia 3 ($U = 3\sigma_x$) wynoszący 99,7%, uznaje się za bardzo wysoki, bliski pewności. Promień tego przedziału określa tzw. *błąd graniczny* Δ_g , którym dawniej charakteryzowano dokładność pomiaru, a obecnie jest wykorzystywany do obliczeń niepewności u_B . „Guide” zaleca w powszechnej praktyce posługiwać się głównie niepewnością standardową.

Pojęcia statystyki matematycznej

Omawiana wyżej sytuacja pojedynczego pomiaru w rozpoznanych warunkach opisywanych rozkładem normalnym jest łatwym przypadkiem szczególnym analizy niepewności pomiaru, dość często występującym w praktyce. Jednak metody analizy i obliczeń niepewności zalecane w „Guide” są ukierunkowane na pomiary w warunkach oddziaływań nierozpoznanych lub rozpoznanych słabo, gdzie nieznane są oba parametry rozkładu zmiennej losowej x modelującej pomiar ($\mu = ?$, $\sigma_x = ?$) i trzeba je szacować na podstawie wyników serii pomiarów, które są jedynym lub głównym źródłem informacji o parametrach rozkładu.

Zagadnieniami szacowania parametrów rozkładu na podstawie ograniczonego materiału statystycznego zajmuje się **statystyka matematyczna**. Całość materiału statystycznego, który podlega badaniu na podstawie niewielkiej jego części nosi nazwę **populacji generalnej** lub **populacji**. Część populacji podlegającej bezpośredniemu badaniu nazywa się **próbą** lub **próbką**. Wyniki serii pomiarów mogą być traktowane jako próba wzięta z populacji wszystkich możliwych wyników pomiarów, których liczność jest równa nieskończoności.

Szacowanie parametrów rozkładu wybranego jako model statystyczny populacji nazywa się **estymacją**, zaś wynik obliczeń określonego parametru na podstawie próby, nosi nazwę **estymaty** tego parametru. Formuła obliczeń (tzw. statystyka) nazywa się **estymatorem**. Często dla odróżnienia parametru populacji i wyniku jego obliczenia z próby, do nazwy parametru dodaje się słowo z *próby*. Tak więc, np. można użyć

równorzędnych nazw: *estymata odchylenia standardowego* (oznaczana $\hat{\sigma}_x$) *odchylenie standardowe z próby* lub *odchylenie standardowe eksperymentalne*.

2.5. Obliczanie niepewności metodą typu A

Jest to metoda obliczania niepewności drogą analizy statystycznej serii pojedynczych pomiarów (obserwacji), przy założeniu, że ich wyniki są skorygowane. Można wykazać, iż najlepszym oszacowaniem (estymatorem) wartości oczekiwanej zmiennej losowej $\underline{x}$ modelującej wyniki pomiarów wielkości X , na podstawie wyników x_i serii n niezależnych pomiarów jest średnia arytmetyczna $\bar{x}$

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2.35)$$

Estymaty parametrów, czyli ich wartości obliczone z próbki, oznaczać będziemy daszkiem nad ich symbolami, np. $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}_x$. Gdy liczba pomiarów w serii zmierza do nieskończoności, średnia arytmetyczna dąży do wartości oczekiwanej

$$\bar{x} = \hat{\mu} \rightarrow \mu, \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty. \quad (2.36)$$

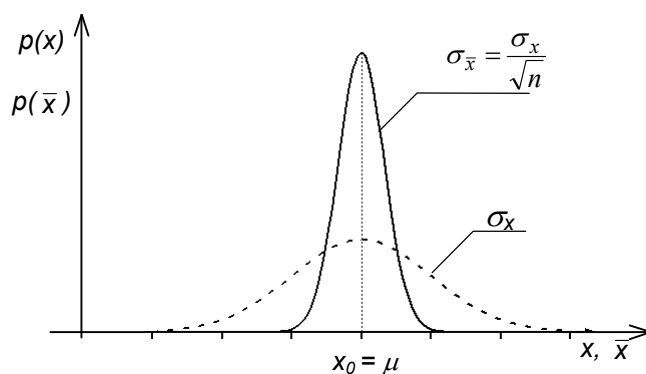
Oznacza to, że jest ona estymatorem nieobciążonym.

Estymatę odchylenia standardowego $\hat{\sigma}_x$ (odchylenie standardowe eksperymentalne) oblicza się ze wzoru

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}}, \quad n > 1, \quad (2.37)$$

gdy $n \rightarrow \infty$, $\hat{\sigma}_x \rightarrow \sigma_x$.

W kolejnych seriach pomiarów z powodu oddziaływań wielkości wpływających otrzymuje się różne wartości średnich arytmetycznych, zatem średnia arytmetyczna jest również zmienną losową. W przypadku, gdy zmienna losowa $\underline{x}$ ma rozkład normalny, średnia arytmetyczna $\bar{x}$ również podlega rozkładowi normalnemu. Jest on bardziej skupiony wokół wartości oczekiwanej μ (rys. 2.8).



Rys. 2.8. Krzywa rozkładu średniej arytmetycznej serii pomiarów (ciągła) na tle rozkładu wyników pojedynczych pomiarów, ilustruje korzyść z przejścia od pojedynczego pomiaru do serii

Odchylenie standardowe $\sigma_{\bar{x}}$ rozkładu średniej arytmetycznej jest powiązane z σ_x zależnością

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \quad (2.38)$$

Ponieważ taka sama zależność wiąże również estymatory obu odchyłeń, na podstawie (2.37) otrzymuje się wzór na estymator odchylenia standardowego średniej arytmetycznej serii n pomiarów

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{(n-1)n}}. \quad (2.39)$$

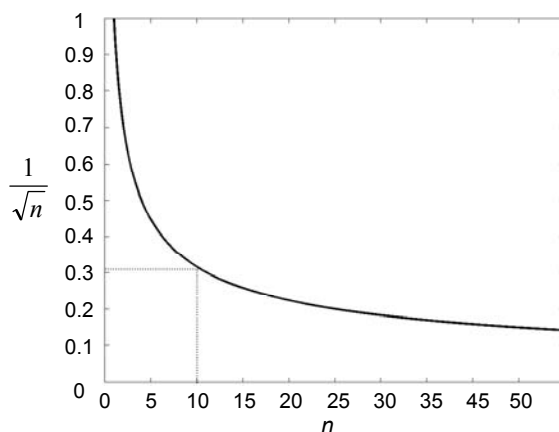
Tak więc, jeżeli jako uzasadniony wynik pomiaru przyjmuje się średnią arytmetyczną $\bar{x}$ wyników serii n pomiarów, to niepewność standardową takiego wyniku

$$u_A = \hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}} \quad (2.40)$$

należy obliczać ze wzoru (2.39).

Obliczana w ten sposób niepewność jest nazywana *niepewnością standardową typu A* i oznaczana u_A . Niepewność standardowa u_A , bywa często jedyną składową niepewności i na jej podstawie oblicza się niepewność rozszerzoną. Powstaje pytanie jaka powinna być liczność serii pomiarów i jak obliczać współczynnik rozszerzenia przy postulowanym poziomie ufności.

Jak wynika z (2.38), współczynnik poprawy niepewności standardowej w następstwie przejścia od pojedynczego pomiaru do serii n pomiarów wynosi $1/\sqrt{n}$. Na rys. 2.9 pokazano wykres tego współczynnika w funkcji n .



Rys.2.9. Wykres przebiegu współczynnika $1/\sqrt{n}$ w funkcji n .

Jak widać z rysunku, współczynnik poprawy maleje szybko na początku układu współrzędnych (dla $n=4$ zmniejsza się 2-krotnie), a dla n dużych maleje powoli. Stąd nadmierne zwiększanie liczby pomiarów w serii nie jest uzasadnione. Liczba ta jednak powinna być na tyle duża, aby zapewnić, że estymaty $\bar{x}$ i $\hat{\sigma}_{\bar{x}}$ są wiarygodnymi oszacowaniami wartości prawdziwej $x_0 = \mu$ oraz niepewności standardowej $u_A = \sigma_{\bar{x}}$.

Uzasadniona liczba pomiarów w serii zależy – jak to wykazemy – od wymaganego poziomu ufności niepewności rozszerzonej.

W celu wyznaczenia relacji między poziomem ufności p_α i współczynnikiem rozszerzenia k_α dla rozważanej sytuacji, należy sięgnąć do zmiennej losowej unormowanej $\underline{z}$ (2.28)

$$\underline{z} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} . \quad (2.41)$$

W przypadku, gdy odchylenie standardowe $\sigma_{\bar{x}}$ nie jest znane a priori i zastępuje się je estymatą obliczoną z próby $\hat{\sigma}_{\bar{x}}$, wtedy (2.41) przekształca się w iloraz dwóch zmiennych losowych (dla odróżnienia oznaczany $\underline{t}$)

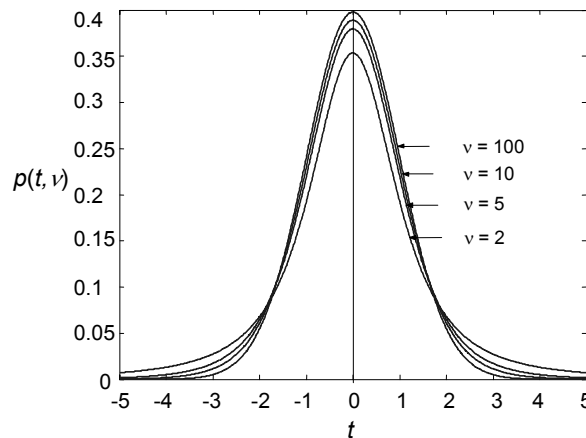
$$\underline{t} = \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{\sigma}_{\bar{x}}} . \quad (2.42)$$

Zmienna losowa $\underline{t}$ jest opisana *rozkładem t-Studenta** o $\nu = n - 1$ stopniach swobody ($\nu > 1$). Funkcja gęstości prawdopodobieństwa tego rozkładu ma postać

$$p(t, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} , \quad (2.43)$$

gdzie: $\Gamma(\cdot)$ - funkcja gamma.

Wartość oczekiwana zmiennej $\underline{t}$ jest równa zero. Reprezentacją graficzną rozkładu t-Studenta (rys. 2.10) jest rodzina krzywych o kształtach dzwonowych i szerokości zależnej od stopni swobody $\nu_i = 1, 2, 3, \dots$. Najbardziej płaska jest krzywa rozkładu dla pierwszego stopnia swobody $\nu = 1$. Ze wzrostem ν rozmycie krzywych zmniejsza się, a przy $\nu \rightarrow \infty$ rozkład t-Studenta zmierza do unormowanego rozkładu normalnego $N(0,1)$. Zatem ten ostatni jest rozkładem granicznym rozkładu t-Studenta.



Rys. 2.10. Krzywe rozkładu t-Studenta o różnych stopniach swobody

* Pseudonim matematyka angielskiego Gosseta, który swoje prace publikował pod pseudonimem Student

Zależność między poziomem ufności p_α i współczynnikiem rozszerzenia k_α wyznacza się z całki błędu

$$p_\alpha = \int_{-k_\alpha}^{k_\alpha} p(t, v) dt \quad \text{dla } v = 1, 2, 3, \dots \quad (2.44)$$

która jest tablicowana dla różnych wartości v . Wybrane dane zestawiono w tablicy 2.1

Tablica 2.1

Współczynniki rozszerzenia k_α obliczone z rozkładu t-Studenta dla wybranych poziomów ufności p_α i różnych stopni swobody v_i

$\begin{matrix} p_\alpha \\ v \end{matrix}$	0,70	0,90	0,95	0,99
1.	1,96	6,31	12,71	63,66
2.	1,88	2,92	4,30	9,92
3.	1,85	2,35	3,18	5,84
4.	1,19	2,13	2,78	4,60
5.	1,15	2,02	2,57	4,03
6.	1,13	1,94	2,45	3,71
7.	1,11	1,89	2,36	3,50
8.	1,10	1,86	2,31	3,36
9.	1,10	1,83	2,26	3,25
∞	1,03	1,64	1,96	2,57

Tablica 2.1 pozwala wysnuć wnioski co do racjonalnego wyboru liczby pomiarów w serii. Jak widać z porównania danych z tablicy 2.1 oraz tablicy na rys. 2.7, dla $v = n - 1 = \infty$ współczynniki rozszerzenia k_α obliczone z rozkładu t-Studenta i rozkładu normalnego pokrywają się. Natomiast różnice są znaczne dla krótkich serii pomiarów, największe dla serii 2 pomiarów. Są one tym większe im większy jest postulowany poziom ufności. Przyczyną tych różnic jest duża niepewność (mała dokładność) wyznaczenia estymaty odchylenia standardowego $\hat{\sigma}_{\bar{x}}$ z mało licznej próby.

Dla niezbyt dużych poziomów ufności $p_\alpha \leq 70\%$ różnice między danymi obliczonymi z obu rozkładów są istotne tylko dla krótkich serii pomiarów $n \leq 5$, natomiast stają się mało istotne na serii dłuższych ($n > 5$). Stąd wniosek, że dla serii $n \leq 5$ współczynnik rozszerzenia należy obliczać z rozkładu t-Studenta, natomiast dla $n > 5$ można obliczać z rozkładu normalnego.

Przy dużych poziomach ufności ($p_\alpha \geq 95\%$) różnice między danymi obliczonymi z rozkładów normalnego i t-Studenta są znaczne nawet przy dużej liczności próby, powyżej 10 pomiarów. Stąd wniosek, że przy dużym postulowanym poziomie ufności p_α (np. 99%), należy wybierać duże próby (np. $n > 10$).

Przykład

Dokonano serii 5 pomiarów rezystancji metodą mostkową. Otrzymano następujące wyniki: 53,2; 53,6; 53,1; 54,9; 53,7 Ω . Obliczyć niepewność standardową u_A , współczynnik rozszerzenia k_α i niepewność rozszerzoną U_A dla poziomu ufności $p_\alpha = 95\%$. Średnia arytmetyczna serii pomiarów

$$\bar{x} = \frac{53,2 + 53,6 + 53,1 + 54,9 + 53,7}{5} = 53,7\Omega. \quad (2.45)$$

Estymata odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru

$$\hat{\sigma}_x = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - 53,7)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(0,5)^2 + (0,1)^2 + (0,6)^2 + (1,2)^2} = 0,72\Omega. \quad (2.46)$$

Estymata odchylenia standardowego średniej arytmetycznej

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{5}} = \frac{0,72}{\sqrt{5}} = 0,32\Omega. \quad (2.47)$$

Współczynnik rozszerzenia k_α wyznaczamy z tablic t-Studenta dla $p_\alpha = 95\%$, $\nu = 5-1=4$. Jego wartość jest równa 2,77.

Zatem otrzymaliśmy: niepewność standardową $u_A = 0,32\Omega$, współczynnik rozszerzenia $k_\alpha = 2,77$ i niepewność rozszerzoną $U_A = k_\alpha u_A = 0,9\Omega$.

Zaleca się wynik pomiaru zapisać i skomentować następująco:

$$x_0 = 53,7\Omega \pm 0,9\Omega \quad \text{przy poziomie ufności } 95\%,$$

ze współczynnikiem rozszerzenia $k_\alpha = 2,77$ obliczonym z rozkładu t-Studenta o liczbie stopni swobody $\nu = 4$.

W przypadku wykorzystania do obliczeń rozkładu normalnego przy $p_\alpha = 95\%$ otrzymuje się: współczynnik rozszerzenia $k_\alpha = 1,96$ i niepewność rozszerzoną $U = 0,64\Omega$.

Wynik można zapisać:

$$x_0 = 53,7\Omega \pm 0,64\Omega \quad \text{przy poziomie ufności } 95\%,$$

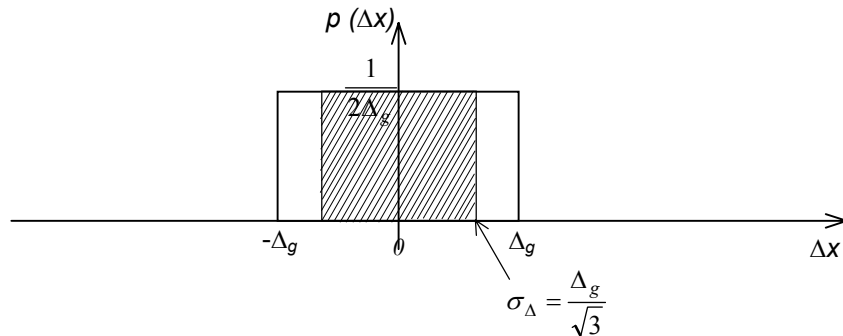
ze współczynnikiem rozszerzenia $k_\alpha = 1,96$ obliczonym z rozkładu normalnego.

Jak widać z porównania zapisów obu wyników, obliczenia na podstawie rozkładu normalnego dają mniejszą niepewność, czyli zwyżają dokładność pomiaru. W tym przypadku rozkład normalny nie powinien być stosowany do obliczeń. Jednak może być stosowany przy dłuższych seriach pomiarów lub mniejszych poziomach ufności.

2.6. Obliczanie niepewności metodą typu B

Metoda typu B, wg „Guide’a” dotyczy obliczania niepewności sposobami innymi niż analiza serii obserwacji i zalecana jest do analizy i szacowania błędów instrumentalnych (aparaturowych). Powtarzanie obserwacji nie ujawnia tych błędów. Niepewność standardową u_B błędów tego typu określa się na drodze analizy opartej na wszystkich możliwych informacjach (poprzednie pomiary, dane instrumentów, wyniki wzorcowania itp.).

Błędy instrumentalne są błędami systematycznymi o nieznannej wartości (ich części znane uwzględnia się w poprawkach). Każdy z tych nieznanymi błędów instrumentalnych (nazywanych niekiedy błędami typu B) jest konkretną realizacją błędu konkretnego egzemplarza przyrządu danego typu (np. wzorca), jest więc zmienną losową w zbiorze przyrządów tego typu i w tym zbiorze ma określony rozkład prawdopodobieństwa, często znany a’priori. Jeżeli nie jest on dobrze znany przyjmuje się, że jest to rozkład równomierny (jednostajny) ograniczony błędami granicznymi $\pm \Delta_g$ (rys. 2.11).



Rys. 2.11. Rozkład równomierny modelujący błędy instrumentalne jako zmienną losową w zbiorze przyrządów danego typu, dla przypadku, gdy rozkład jest symetryczny o wartości oczekiwanej równej zero

Przy takich założeniach niepewność standardowa typu B będzie równa odchyleniu standardowemu rozkładu jednostajnego:

$$u_B = \sigma_\Delta = \frac{\Delta_g}{\sqrt{3}}. \quad (2.48)$$

Współczynnik rozszerzenia w tym przypadku jest opisany zmienną losową unormowaną rozkładu jednostajnego. Z całki błędu dla takiego rozkładu można wyznaczyć prostą zależność między współczynnikiem rozszerzenia i odpowiednim poziomem ufności

$$k_\alpha = \sqrt{3} p_\alpha. \quad (2.49)$$

Niepewność rozszerzona typu B jest równa

$$U_B = k_\alpha u_B = \frac{1}{\sqrt{3}} k_\alpha \Delta_g, \quad \text{przy postulowanym } p_\alpha. \quad (2.50)$$

W szczególnym przypadku, gdy dominuje błąd typu B o 1 składniku, ocenia się zwykle wartość graniczną niepewności rozszerzonej dla poziomu ufności $p_\alpha = 1$ (100%)

$$U_B = k_\alpha u_B = \sqrt{3} p_\alpha \frac{\Delta_g}{\sqrt{3}} = \Delta_g, \quad \text{dla } p_\alpha = 100\%, \quad (2.51)$$

która jest równa wartości błędu granicznego Δ_g .

W ogólnym przypadku zaleca się operować standardową niepewnością u_B . Jest ona bardzo często obliczana na podstawie specyfikacji producentów aparatury, danych wzorcowania lub świadectwa certyfikacji. Typowy sposób obliczeń u_B na podstawie dokumentacji wzorca zilustrujemy przykładem.

Przykład

Świadectwo certyfikacji stwierdza, że rezystancja R_s wzorca rezystancji o wartości nominalnej 10Ω wynosi $(10000742 \pm 129)\mu\Omega$ w temperaturze 23°C i że podana niepewność $129\mu\Omega$ określa przedział o poziomie ufności 99% obliczony z rozkładu normalnego. Jaka jest niepewność standardowa tego wzorca? Z tablic funkcji $p_\alpha = \varphi(k_\alpha)$ stwierdzamy, że poziomowi ufności 99% odpowiada współczynnik rozszerzenia $k_\alpha = 2,58$.

Zatem niepewność standardowa $u_{R_s} = 129\mu\Omega / 2,58 = 50\mu\Omega$, zaś względna niepewność standardowa $u_{R_s}/R_s = 5,0 \times 10^{-6}$.

2.7. Określanie złożonej niepewności standardowej

Pomiary bezpośrednie

Dla wielkości mierzonej bezpośrednio, kiedy uwzględnia się niepewność standardową typu A i typu B *złożona niepewność standardowa* u_c jest pierwiastkiem sumy kwadratów tych niepewności

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} . \quad (2.52)$$

Niepewność rozszerzona jest iloczynem współczynnika rozszerzenia i złożonej niepewności standardowej

$$U = k_\alpha u_c . \quad (2.53)$$

Współczynnik rozszerzenia dla zadanego poziomu ufności p_α powinien być obliczany na podstawie rozkładu standaryzowanej zmiennej losowej o rozkładzie będącym splotem rozkładu normalnego i rozkładu jednostajnego, kiedy próba jest liczna lub rozkładu t-Studenta i jednostajnego, kiedy próba jest małoliczna.

Pomiary pośrednie

W większości przypadków wielkość poszukiwana y nie jest mierzona bezpośrednio, lecz wyznaczana na podstawie pomiarów innych wielkości x_i związanych z nią określoną zależnością funkcyjną

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.54)$$

nazywaną *równaniem pomiaru*.

Na przykład, moc prądu lub rezystancję wyznacza się niekiedy na podstawie pomiarów prądu i napięcia, korzystając z odpowiednich wzorów. Wielkości $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywane są *wielkościami wejściowymi*, a y *wielkością wyjściową*.

Aby wyznaczyć zmianę Δy funkcji (2.54) spowodowaną zmianami jej argumentów o $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ należy obliczyć jej różnicę w punktach $x_i + \Delta x_i$ oraz x_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.55)$$

Rozwijając pierwszy czynnik wyrażenia (2.55) w szereg Taylora oraz zachowując w nim tylko wyrazy pierwszego rzędu otrzymuje się taką jego postać

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n, \quad (2.56)$$

która odwzorowuje równanie pomiaru w dziedzinie błędów i nazywana jest czasami *równaniem błędów*.

Pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.57)$$

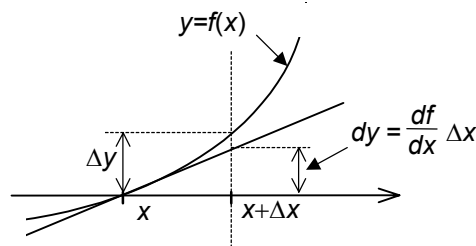
nazywane są współczynnikami wrażliwości, zaś całe wyrażenie nazywa się *różniczką zupełną*.

Należy wyraźnie podkreślić, iż różniczka zupełna wiernie opisuje przyrost funkcji liniowej, natomiast w przybliżeniu reprezentuje (aproksymuje) przyrost funkcji nieliniowej. Przybliżenie to jest tym lepsze im mniejsze są przyrosty Δx_i .

Najłatwiej można to zilustrować graficznie na przykładzie funkcji jednej zmiennej, pokazanej na rys. 2.11, dla której (2.56) upraszcza się do postaci

$$\Delta y = \frac{df}{dx} \Delta x. \quad (2.58)$$

Na rysunku zaznaczono rzeczywisty przyrost funkcji Δy i różniczkę zupełną $dy = df/dx \Delta x$.



Rys. 2.12. Ilustracja różnicy między różniczką zupełną dy i rzeczywistym przyrostem funkcji Δy

Różniczka zupełna (2.56) może być wykorzystywana do obliczeń poprawki błędu systematycznego wielkości wyjściowej na podstawie znanych co do wartości i znaku poprawek błędów wielkości wejściowych.

Prawo propagacji niepewności

Na podstawie różniczki zupełnej formułowane jest *prawo propagacji niepewności* w postaci

$$u_{cy} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_{xi}^2}, \quad (2.59)$$

gdzie u_{xi} – niepewności standardowe pomiaru wielkości wejściowych obliczone metodą typu A lub typu B

Złożona niepewność standardowa u_{cy} jest estymatą odchylenia standardowego $\hat{\sigma}_y$ i charakteryzuje rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej y .

Prawo propagacji niepewności w postaci (2.59) jest słuszne jeżeli zmienne wejściowe są nieskorelowane, co w praktyce pomiarowej ma najczęściej miejsce. Gdy niektóre z wielkości wejściowych są skorelowane, należy korzystać z bardziej złożonych wzorów zamieszczonych w „Guide”.

Wynik końcowy pomiaru wielkości Y oblicza się z funkcji (2.54), przyjmując średnie arytmetyczne wielkości bezpośrednio mierzonych

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n). \quad (2.60)$$

Warto zaznaczyć, iż wielkościami wejściowymi x_i w równaniu pomiaru (2.54) oraz wynikających z niego równaniach (2.56) i (2.59), mogą być nie tylko wielkości mierzone bezpośrednio, lecz także wielkości wpływające, których niepewności znane są z literatury, norm lub dokumentacji aparatury. Zilustrujemy to na przykładzie.

Przykład

Jedną z pośrednich metod pomiaru mocy rozpraszanej przez opornik w temperaturze t , który ma rezystancję zależną od temperatury o wartości R_0 w określonej temperaturze t_0 i liniowy współczynnik temperaturowy rezystancji α , polega na bezpośrednim pomiarze napięcia V na zaciskach opornika oraz temperatury otoczenia t i wyznaczeniu wartości mocy P ze wzoru

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = \frac{V^2}{R_0 [1 + \alpha(t - t_0)]}. \quad (2.61)$$

Złożona niepewność standardowa wyniku pomiaru mocy tą metodą może być wyrażona następująco

$$u_{cP} = \sqrt{(c_1 u_V)^2 + (c_2 u_{R_0})^2 + (c_3 u_\alpha)^2 + (c_4 u_t)^2}, \quad (2.62)$$

gdzie

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\partial f}{\partial V} = 2V / R_0 [1 + \alpha(t - t_0)] \\ c_2 &= \frac{\partial f}{\partial R_0} = -V^2 / R_0^2 [1 + \alpha(t - t_0)] \\ c_3 &= \frac{\partial f}{\partial \alpha} = -V^2 (t - t_0) / R_0 [1 + \alpha(t - t_0)]^2 \\ c_4 &= \frac{\partial f}{\partial t} = -V^2 \alpha / R_0 [1 + \alpha(t - t_0)]^2 \end{aligned} \quad (2.63)$$

Niepewności standardowe pomiarów wielkości mierzonych bezpośrednio, napięcia V i temperatury t , są wyznaczane jako estymaty odchyłeń standardowych średnich arytmetycznych obu tych wielkości. Wielkości R_0 i α są wielkościami wpływającymi, których wartości i niepewności standardowe są wyznaczane z danych rezystora R_0 i tablic fizycznych metodą typu B.

2.8. Wyznaczanie niepewności rozszerzonej w pomiarach pośrednich

W pomiarach pośrednich niepewność rozszerzoną oblicza się jako iloczyn współczynnika rozszerzenia k_α i niepewności standardowej złożonej u_{cy} obliczanej z (2.59)

$$U_{\bar{y}} = k_\alpha u_{cy}, \quad (2.64)$$

a wynik pomiaru zapisuje się

$$y = \bar{y} \pm U \quad \text{na poziomie ufności } p_\alpha \quad (2.65)$$

Spotyka się też zapis bardziej zwięzły

$$y = \bar{y} \pm U_p, \quad (2.66)$$

w którym dolny indeks oznaczenia U_p informuje o poziomie ufności (w procentach), np. U_{95} .

Ścisłe obliczanie współczynnika rozszerzenia dla postulowanego poziomu ufności jest w przypadku pomiarów pośrednich zagadnieniem trudnym, ponieważ wymaga znajomości funkcji rozkładu gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej modelującej wynik pomiaru $\bar{y}$. Jest ona splotem rozkładów składowych zmiennych losowych modelujących wielkości wejściowe. Obliczanie splotów jest trudne za wyjątkiem przypadków szczególnych, do których należy splot dowolnej liczby rozkładów normalnych. Jest on rozkładem normalnym o łatwych do obliczenia parametrach ($\mu_y = \mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \dots + \mu_{x_n}$), ($\sigma_y^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \dots + \sigma_{x_n}^2$).

Z tego względu w praktyce stosuje się przybliżone metody wyznaczania współczynnika rozszerzenia.

Przybliżone metody wyznaczania niepewności rozszerzonej

Przedstawimy tu kilka najszerzej znanych i stosowanych metod przybliżonych.

Metoda I - narzuconych wartości współczynnika rozszerzenia: $k_\alpha = 2$ dla $p \cong 95\%$ i $k_\alpha = 3$ dla $p_\alpha \cong 99\%$. Metodę tę zaleca „Guide” dla sytuacji pomiarowych, w których zmienne losowe modelujące błędy wnoszone przez wielkości wejściowe mają rozkłady normalne lub zbliżone do normalnego lub też, gdy przy innych rozkładach serie pomiarów są liczne ($n > 10$). Metoda zakłada, iż wystarczającą jest przybliżona znajomość poziomu ufności (co w praktyce często ma miejsce), stąd wartości p_α są zaokrąglone w dół.

Metoda II – sumy geometrycznej, polega na obliczaniu niepewności rozszerzonej U_i dla każdej wielkości wejściowej (dla każdej składowej błędu) osobno i obliczaniu niepewności rozszerzonej wielkości wyjściowej U_y jako pierwiastka sumy kwadratów składowych niepewności

$$U_y = \sqrt{U_{x_1}^2 + U_{x_2}^2 + \dots + U_{x_n}^2}. \quad (2.67)$$

Współczynniki rozszerzenia niepewności składowych należy obliczać dla tego samego poziomu ufności.

Metoda III – sumy zwykłej (algebraicznej)

Sumowanie w dziedzinie niepewności

$$U = U_A + U_B \quad \text{lub} \quad U_y = U_{x_1} + U_{x_2} + \dots + U_{x_n}. \quad (2.68)$$

W dziedzinie błędów stosuje się sumowanie wartości bezwzględnych błędów składowych

$$\Delta y = |c_1 \Delta x_1| + |c_2 \Delta x_2| + \dots + |c_n \Delta x_n|. \quad (2.69)$$

Metoda zakłada najgorszy przypadek sumowania się błędów, tzn. taką sytuację, w której wszystkie błędy składowe mają wartości maksymalne i jednakowe znaki. Jest to mało prawdopodobne, co oznacza, iż metoda zawyża niepewność pomiaru, jest najbardziej pesymistyczna.

Jest ona stosowana w pomiarach warsztatowych, z powodu łatwości obliczeń, a także w szczególnych sytuacjach lub przypadkach, np. wyznaczaniu tolerancji, w wymiarowaniu detali maszyn wymagających zachowania określonych luzów itp.

Metoda IV – dominującego składnika, zalecana dla przypadków, gdy dominuje jedna ze składowych niepewności typu A lub B.

Jeżeli $u_A > u_B$ to $k_\alpha = k_{\alpha A}$, jeżeli $u_B > u_A$ to $k_\alpha = k_{\alpha B}$

$$U = k_\alpha u_c \quad (2.70)$$

Metoda V – efektywnych stopni swobody, jest zalecana przez „Guide” dla serii niejednakowo licznych, w sytuacji gdy poziomy ufnosci muszą być znane z dużą wiarygodnością. Zakłada ona, że jeżeli złożona niepewność standardowa jest składana z dwóch lub więcej czynników, na podstawie prób o niejednakowej liczności (o niejednakowych stopniach swobody ν_i) i nieznanymi odchyleniami standardowymi σ_{x_i} , to nieznan rozkład modelujący łączny błąd pomiaru Δy może być przybliżony rozkładem t-Studenta dla liczby efektywnych stopni swobody ν_{eff} , którą można wyznaczyć z ogólnej formuły Welch-Satterthwaite’a

$$\nu_{eff} = \frac{u_{cy}^4}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^4 \cdot \frac{u_{x_i}^4}{\nu_i}} \quad (2.71)$$

gdzie:

u_{cy} - złożona niepewność standardowa wielkości wyjściowej,

u_{x_i} - niepewności standardowe wielkości wejściowych, $i = 1, 2, \dots, N$.

ν_i - liczby stopni swobody dla serii pomiarowej wielkości wejściowej x_i .

Dla ułatwienia wyboru podejścia i metody odpowiedniej dla danej sytuacji pomiarowej, zwięźłą charakterystykę omówionych metod przedstawiono w postaci tablicowej.

Zestawienie metod przybliżonych

Tablica 2.2

Najbardziej znane przybliżone metody wyznaczania niepewności rozszerzonej

Metoda przybliżona	Niepewność rozszerzona U	Współczynnik rozszerzenia k
I. narzuconych wartości współczynnika rozszerzenia	$U = k_\alpha u_c$	$k_\alpha = \begin{cases} 2 & \text{dla } p_\alpha = 95\% \\ 3 & \text{dla } p_\alpha = 99\% \end{cases}$
II. sumy geometrycznej	$U = \sqrt{U_A^2 + U_B^2}$ $U_x = \sqrt{U_{x_1}^2 + U_{x_2}^2 + \dots + U_{x_n}^2}$	$k_{\alpha x_i}$ określa się dla tych samych $p_{\alpha i}$

III. sumy zwykłej (arytmetycznej)	$U_x = U_{x_1} + U_{x_2} + \dots + U_{x_n}$ $\Delta y = c_1 \Delta x_1 + c_2 \Delta x_2 + \dots + c_n \Delta x_n $	Poziom ufności nie jest podawany. Sumowanie charakteryzuje się opisowo
IV. dominującego składnika	$U = k_\alpha u_c$	$k_\alpha = \begin{cases} k_{\alpha A} & \text{dla } u_A > u_B \\ k_{\alpha B} & \text{dla } u_A < u_B \end{cases}$
V. efektywnych stopni swobody	$U = k_\alpha u_c$	$p_\alpha = \varphi(k_\alpha)$ wyznacza się z rozkładu t-Studenta o ν_{eff} stopniach swobody

Propagacja niepewności względnych

Dotychczasowe rozważania dotyczyły głównie niepewności i błędów bezwzględnych. W praktyce pomiarowej często wygodnie jest posługiwać się niepewnością względną, która niekiedy daje pełniejszą charakterystykę dokładności pomiaru. Na przykład pomiar napięcia 200 V z niepewnością standardową 1 V można uznać za dość dokładny, natomiast pomiar napięcia 5 V z tą samą niepewnością standardową jest mało dokładny.

Wzory na sumowanie (propagację) niepewności względnych łatwo wyprowadzić z różniczki zupełnej (2.56) lub prawa propagacji niepewności (2.59). Można je niekiedy przedstawić explicite w postaci prostszej od przypadku niepewności lub błędów bezwzględnych.

Pokażemy to na kilku przykładach.

Przykład potęgowej funkcji $y = f(x)$ jednej zmiennej

$$y = x^k. \quad (2.72)$$

Ze wzoru (2.58) łatwo otrzymać

$$\delta_{u_y} = \frac{u_y}{y} = k \frac{u_x}{x} = k \delta_{u_x}. \quad (2.73)$$

Oznacza to, że niepewność względna wielkości wyjściowej y mierzonej pośrednio jest k razy większa od niepewności wielkości wejściowej mierzonej bezpośrednio. Przykładem pomiaru tego rodzaju jest pomiar mocy na podstawie pomiaru napięcia stałego na znanej rezystancji R i wyznaczanie mocy ze wzoru $P = \frac{U^2}{R}$.

Przykład funkcji postaci

$$y = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_m}. \quad (2.74)$$

Dla takiej funkcji z różniczki zupełnej (2.56) otrzymuje się wzór na sumowanie błędów względnych metodą sumy algebraicznej w postaci

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{y} = \left| \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\Delta x_n}{x_n} \right| + \left| \frac{-\Delta z_1}{z_1} \right| + \left| \frac{-\Delta z_2}{z_2} \right| + \dots + \left| \frac{-\Delta z_m}{z_m} \right|. \quad (2.75)$$

Natomiast z zależności (2.58) otrzymuje się taki wzór na propagację niepewności względnych

$$\delta_{U_y} = \frac{U_y}{y} = \frac{U_{x_1}}{x_1} + \frac{U_{x_2}}{x_2} + \dots + \frac{U_{x_n}}{x_n} + \frac{U_{z_1}}{z_1} + \frac{U_{z_2}}{z_2} + \dots + \frac{U_{z_m}}{z_m}. \quad (2.76)$$

Przykład obliczania tolerancji

W celu zilustrowania przydatności metody III do obliczeń tolerancji rozpatrzmy przykład obliczania tolerancji rezystancji wypadkowej otrzymanej z szeregowego i równoległego połączenia 2 oporników o różnych tolerancjach.

Dwa oporniki $R_1 = 100\Omega \pm 5\%$ i $R_2 = 400\Omega \pm 1\%$, połączono raz szeregowo, raz równoległe. Obliczyć wartości i tolerancje rezystancji wypadkowych otrzymanych w obu wymienionych połączeniach.

Tolerancja rezystancji może być wyrażona względną niepewnością graniczną lub względnym błędem granicznym. Do jej obliczeń można wykorzystać wzór (2.71)

$$\Delta y = |c_1 \Delta x_1| + |c_2 \Delta x_2| + \dots + |c_n \Delta x_n|,$$

który dla względnych błędów granicznych przyjmuje postacie (2.77) i (2.78), zależnie od sposobu połączeń.

1. Połączenie szeregowe

$$R_{sz} = R_1 + R_2 = 100\Omega + 400\Omega = 500\Omega.$$

Współczynnik czułości:

$$c_1 = \frac{\partial R_{sz}}{\partial R_1} = 1, \quad c_2 = \frac{\partial R_{sz}}{\partial R_2} = 1$$

$$\delta_{R_{sz}} = \frac{\Delta R_{sz}}{R_{sz}} = \left| \frac{\Delta R_1}{R_1 + R_2} \right| + \left| \frac{\Delta R_2}{R_1 + R_2} \right| = \left| \frac{R_1}{R_1 + R_2} \delta_{R_1} \right| + \left| \frac{R_2}{R_1 + R_2} \delta_{R_2} \right|. \quad (2.77)$$

Podstawiając wartości rezystancji i tolerancje oporników R_1 i R_2 otrzymujemy:

$$\delta_{R_{sz}} = 1,8\%; \quad R_{sz} = 500\Omega \pm 1,8\%.$$

2. Połączenie równoległe

$$R_r = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 80\Omega.$$

Współczynniki czułości w tym przypadku wynoszą odpowiednio:

$$c_1 = \frac{\partial R_r}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}, \quad c_2 = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2},$$

stąd:

$$\delta_{R_r} = \frac{\Delta R_r}{R_r} = \left| \frac{R_2}{R_1 + R_2} \delta_{R_1} \right| + \left| \frac{R_1}{R_1 + R_2} \delta_{R_2} \right|. \quad (2.78)$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

$$\delta_{R_r} = 4,2\%; \quad R_r = 80\Omega \pm 4,2\%.$$

2.9 Niektóre terminy i pojęcia statystyczne

Zróżnicowany stopień opanowania rachunku prawdopodobieństwa w szkole średniej oraz fakt, iż równolegle wykładany przedmiot „Metody probabilistyczne” jest jeszcze niewiele zaawansowany, skłaniają do zdefiniowania lub przypomnienia niektórych pojęć statystycznych. Celowym wydaje się metrologiczne podejście i interpretacja tych pojęć na przykładzie serii wielokrotnie powtarzanych pomiarów (lub obserwacji) i uporządkowanie ich wyników na podstawie przynależności do jednakowych przedziałów Δx_i w postaci histogramu.

Częstość

Liczba przypadków zajścia zdarzenia losowego lub liczba obserwacji należących do określonej klasy.

W przypadku serii n pomiarów, w której zakres rozproszenia wyników podzielono na przedziały o szerokości Δx_i częstość wyraża się ilorazem

$$\frac{n_i}{n},$$

gdzie n_i – liczba wyników należących do przedziału Δx_i .

Częstość względna

Jest to częstość znormalizowana względem szerokości przedziału przynależności Δx_i

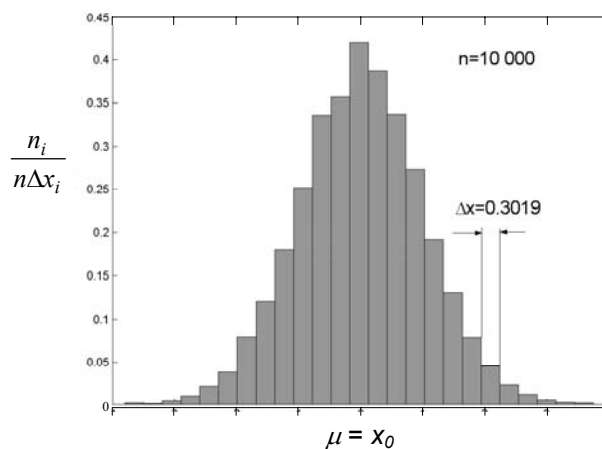
$$\frac{n_i}{n\Delta x_i}.$$

Histogram

Rozkład częstości lub częstości względnej.

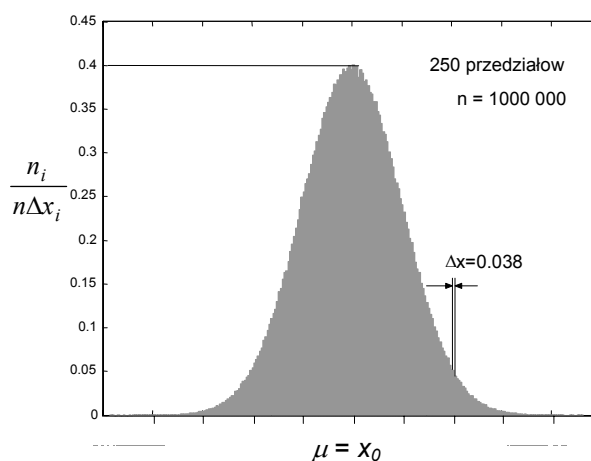
Na rysunku 2 pokazany jest przykład histogramu częstości względnej dla zbiorowości (serii) $n = 10\,000$ pomiarów i 25 przedziałów przynależności o jednakowej szerokości $\Delta x_i = 0,302$. **Częstość względna** wyników należących do określonego przedziału jest równa wysokości zaś **częstość** jest równa powierzchni słupka rozpiętego na tym przedziale. Wynika stąd, iż pole histogramu jest równe jedności, co łatwo wykazać

$$\sum_i \frac{n_i}{n} = \frac{n}{n} = 1$$



Rys. 1.13. Histogram dla zbiorowości $n = 10\,000$ pomiarów i 25 przedziałów przynależności $\Delta x_i = 0,3019$

Jeżeli liczność zbiorowości pomiarów n rośnie, a szerokość przedziałów przynależności Δx_i maleje histogram staje się coraz bardziej wieloschodkowy (rys.2.13), a jego obwiednia wygładza się i w granicy, przy $n \rightarrow \infty$ i $\Delta x_i \rightarrow 0$ przechodzi w krzywą ciągłą.



Rys. 2.14 Histogram dla zbiorowości $n = 1\,000\,000$ pomiarów i 250 przedziałów przynależności $\Delta x_i = 0,036$

Zmienna losowa

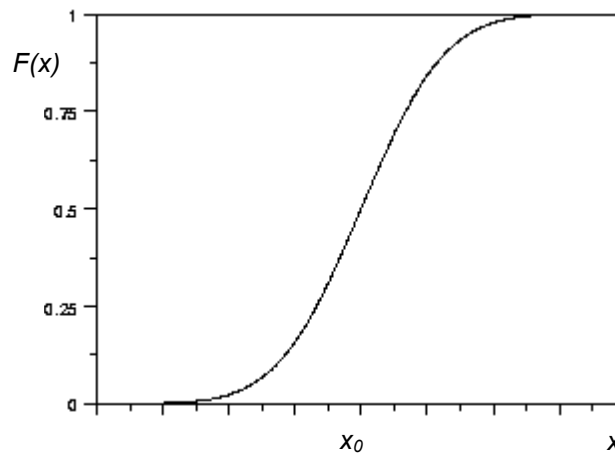
Zmienna, która może przyjmować odosobnione lub dowolne wartości z określonego zbioru i z którą związany jest rozkład prawdopodobieństwa. Zmienna losowa, która może przyjmować jedynie odosobnione wartości nazywana jest *dyskretną*, zaś ta, która może przyjmować dowolne wartości ze skończonego lub nieskończonego przedziału nazywana jest zmienną losową *ciągłą*.

Dystrybuanta

Funkcja określająca dla każdej wartości x prawdopodobieństwo, że zmienna losowa $\underline{x}$ przyjmuje wartość mniejszą lub równą x

$$F(x) = P(\underline{x} \leq x)$$

Na rysunku 2.15 pokazana jest przykładowa dystrybuanta



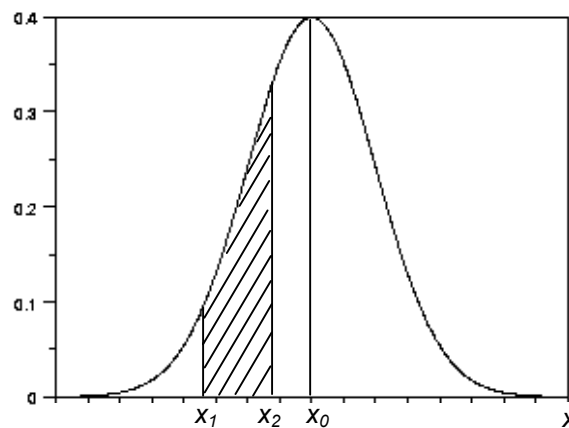
Rys. 2.15. Przykładowa dystrybuanta zmiennej losowej ciągłej

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa

Dla zmiennej losowej ciągłej jest pochodną dystrybuanty

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Na rys.2.16 pokazana jest funkcja gęstości prawdopodobieństwa (nazywana też krótko gęstością prawdopodobieństwa) zmiennej losowej o dystrybuancie z rys.2.15



Rys. 2.16. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa odpowiadająca dystrybuancie z rys. 2.15

Prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną losową $\underline{x}$ wartości z przedziału (x_1, x_2) wyraża się jako całka z gęstości prawdopodobieństwa tej zmiennej w tym przedziale

$$P(x_1 < \underline{x} < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = F(x_2) - F(x_1)$$

Jest ono równe polu pod krzywą rozpiętą na tym przedziale lub różnicy wartości dystrybucyj w punktach x_2 i x_1 .

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa może być interpretowana funkcja graniczna obwiedni histogramu w warunkach, gdy liczność zbiorowości dąży do ∞ a szerokość przedziału przynależności dąży do zera, tzn.:

gdy $n \rightarrow \infty$, $\Delta x_i \rightarrow 0$,
wtedy też

$$\frac{n_i}{n} \rightarrow P(x < \underline{x} < x + dx) \quad \text{oraz} \quad \frac{n_i}{n \Delta x_i} \rightarrow p(x)$$

Zatem prawdopodobieństwo i gęstość prawdopodobieństwa mogą być interpretowane jako wartości graniczne odpowiednio częstości i częstości względnej.

2.10 Wykaz oznaczeń:

$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$	– współczynnik wrażliwości, pochodna cząstkowa
Δ_g	– błąd graniczny pomiaru
$\Delta x, \varepsilon_x$	– błąd pomiaru wielkości (bezwzględny)
δ_u	– względna niepewność wyniku pomiaru wielkości x
δ_x	– względny błąd pomiaru wielkości x
$E(\underline{x})$	– wartość średnia zmiennej losowej $\underline{x}$
k_α	– współczynnik rozszerzenia
kl	– klasa przyrządu
μ	– wartość oczekiwana
$\hat{\mu}$	– estymata wartości oczekiwanej, wartość oczekiwana z próby
$N(\mu, \sigma)$	– rozkład normalny o parametrach (μ, σ)
$N(0, 1)$	– unormowany rozkład normalny
ν	– liczba stopni swobody rozkładu t-Studenta
ν_{eff}	– efektywna liczba stopni swobody
p_α	– poziom ufności wyrażany ułamkiem lub w procentach
$p_\alpha = \varphi(k_\alpha)$	– funkcja błędu
$p_x = -\Delta x$	– poprawka wyniku pomiaru wielkości x
σ_x	– odchylenie standardowe zmiennej losowej x
σ_x^2	– wariancja zmiennej losowej x
$\hat{\sigma}_x$	– estymata odchylenia standardowego, odchylenie standardowe z próby
u	– niepewność standardowa
u_A	– niepewność standardowa typu A (obliczana metodą A)
u_B	– niepewność standardowa typu B (obliczana metodą B)
u_c	– złożona niepewność standardowa
u_x, u_y	– niepewność standardowa wyniku pomiaru odpowiednio wielkości x i y
U	– niepewność rozszerzona
U_x, U_y	– niepewność rozszerzona wyniku pomiaru odpowiednio wielkości x i y
w_p	– współczynnik poprawkowy
$\underline{x}$	– zmienna losowa
x	– wynik pomiaru wielkości, wielkość mierzona
$\bar{x}, \bar{y}$	– średnia arytmetyczna serii pomiarów odpowiednio wielkości x i y
x_{zakr}	– wartość zakresowa
x_0	– wielkość prawdziwa wielkości mierzonej
$\underline{z}, \underline{t}$	– zmienne losowe unormowane (standaryzowane)